UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Hidráulica

Cátedra de
HIDRÁULICA GENERAL

ECUACIÓN DE LA VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO APLICADA A LOS FLUIDOS

Autor: Ing. Luis E. Pérez Farrás
Edición: Inga. Andrea Bonafine

ECUACIÓN DE LA VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO APLICADA A LOS FLUIDOS

INDICE

ECUACIÓN DE LA VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO APLICADA A LOS FLUIDOS

1. GENERALIDADES Y OBJETIVOS

El presente texto se realiza como perfeccionamiento del texto original publicado por el CEI, con la intención de aclarar los aspectos deductivos de la fundamental ecuación general, de la Variación de la Cantidad de Movimiento, aplicada a los fluidos.

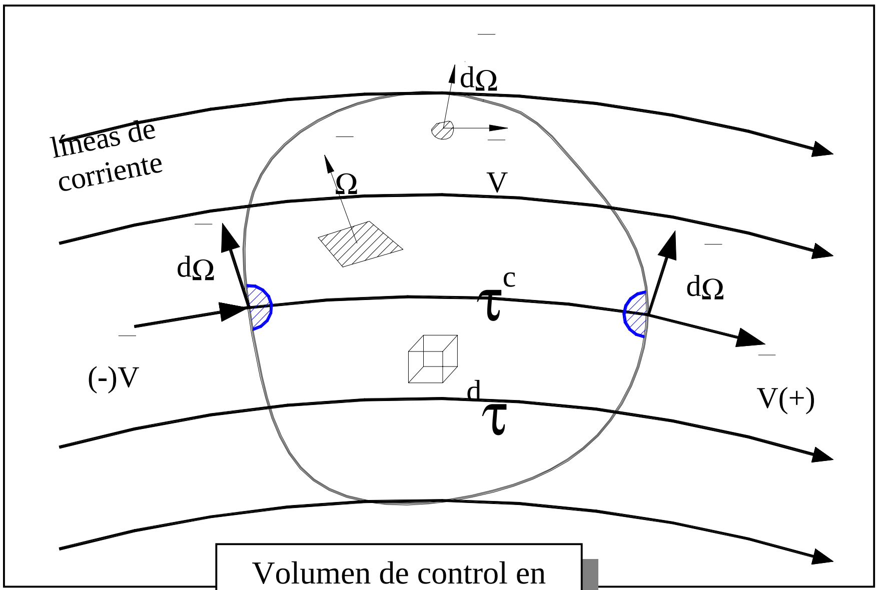
El objetivo central es el de presentar al alumnado, la deducción de la ecuación fundamental de referencia, en forma más perfeccionada, tanto en el proceso deductivo, como en la presentación pedagógica, pretendiendo una versión que pretende ser más fácil de ser comprendida.

Una vez deducida la ecuación fundamental, con la aplicación de las Hipótesis simplificativas a adoptar, se **obtendrá la ecuación de la "Acción Dinámica", válida para escurrimiento unidimensional (en tubo de corriente) y régimen permanente y de gran aplicación en la Hidráulica unidimensional.**

2. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE LA VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO APLICADA A LOS FLUIDOS

Del "Segundo Principio de la Dinámica" expresado como 2da. Ecuación de Newton, se tiene que:

$$\overline{F} = \frac{d}{dt}(m\overline{V})$$



Volumen de control en un medio continuo

La Figura que sigue ilustra convenientemente, como se puede extrapolar la ecuación previa a una aplicación más compleja, como lo es **la consideración de la misma en un volumen fijo en el espacio, tomado como Volumen de Control τ_c y superficie Ω_c y que es permanentemente atravesado por un continuo, asociado a un campo de velocidades variable de instante a instante.**

La Variación Total de la Cantidad de Movimiento, puede ser evaluada por partes, una primera teniendo en cuenta **en un instante dado** el balance entre la Cantidad de Movimiento entrante y saliente de la superficie de control y una segunda, teniendo en cuenta su variación en el tiempo, dentro del volumen de control, para el tiempo tendiendo al instante considerado.

En símbolos, la expresión a desarrollar puede ser establecida como:

$$\overline{F} = \Delta cm_{\Omega_c} + \Delta cm_{\tau_c}$$

En la que:

- $\overline{F}$ es la Resultante de todas las fuerzas actuantes en el Volumen de control fijo en el espacio y atravesado por el continuo
- Δcm_{Ω_c} es el balance de la Cantidad de movimiento entrante y saliente por la superficie de control Ω_c
- Δmc_{τ_c} es la variación de la Cantidad de Movimiento dentro del volumen de control τ_c en el tiempo para el instante considerado.

2.1. EVALUACIÓN DE LA VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO A TRAVÉS DE LA SUPERFICIE DE CONTROL

El caudal elemental que pasa por un elemento de la superficie de control es, por definición:

$$dQ = \overline{V} . d\overline{\Omega}$$

El gasto de masa elemental será:

$$dQ_m = \rho \; dQ = \rho \; \overline{V} \; d\overline{\Omega}$$

La cantidad de movimiento, consecuentemente resulta:

$$\rho \; \overline{V} \; d\overline{\Omega} \; \overline{V} \; dt$$

Nota: Se deja intencionalmente la expresión reiterando en ella dos veces al vector velocidad, sin realizar su producto, lo que lo llevaría a ser elevado al cuadrado, de manera tal que quede bien establecido el caudal, concepto que no sería tan visible de efectuar la operación aludida y que oportunamente será realizada.

El balance de Cantidad de movimiento entrante y saliente, extendido a toda la superficie del volumen de control, es la integral de la expresión previa extendida a dicha superficie. En efecto, el nombrado balance, resulta para un instante dado:

$$\int \rho \; \overline{V} \; d\overline{\Omega} \; \overline{V} \; dt$$

Su derivada en el tiempo resulta, consecuentemente

$$\frac{d}{dt}\int \rho\ \overline{V}\ d\overline{\Omega}\ \overline{V}\ dt\ =\ \int \rho\ \overline{V}\ \overline{V}\ d\overline{\Omega}$$

La expresión anterior implica "La cantidad de movimiento a través de la superficie de control en un instante dado y es el término Δcm_{Ω_c} convenientemente elaborado.

2.2. EVALUACIÓN DE LA VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DENTRO DEL VOLUMEN DE CONTROL

Al ser considerado un volumen elemental $d\tau_c$ del volumen de control τ_c (tal como puede observarse en la figura) en todo instante el mismo es ocupado por una partícula fluida de masa elemental y asociada a un vector velocidad, el que puede variar de instante a instante con las sucesivas partículas que pasen por ese punto del espacio.

La cantidad de movimiento elemental y para un instante dado será:

$$\rho\ d\tau_c\ \overline{V}$$

La cantidad de movimiento, en un instante, extendida a todo el volumen de control resulta:

$$\int_{\tau_c} \rho\ d\tau_c\ \overline{V}$$

La variación de la cantidad de movimiento dentro del volumen elemental será:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}(\rho\ d\tau_c\ \overline{V})$$

Nota.: Al ser el volumen de control fijo en el espacio, las derivadas parciales coinciden con las totales, puesto que la única variable remanente es el tiempo.

La anterior es el término Δmc_{τ_c} convenientemente elaborado.

2.3. EXPRESIÓN FINAL DE LA ECUACIÓN DE LA VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Reemplazando en la expresión:

$$\overline{F}\ =\ \Delta cm_{\Omega_c}\ +\ \Delta cm_{\tau_c}$$

los sumandos elaborados del segundo término, se obtiene la expresión general buscada:

$$\overline{F} = \int_{\Omega} \rho\, \overline{V}\,\overline{V}\, d\overline{\Omega} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau} \rho\, \overline{V}\, d\tau$$

La misma expresa, la Fuerza resultante de todas las actuantes en el volumen de control, teniendo en cuenta las acciones que tienen lugar en toda la superficie del volumen de control en un instante dado y el efecto dinámico de la intensidad de la variación de la cantidad de movimiento en el interior del volumen, para el instante en consideración.

3. INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Dada la extrema complejidad de la ecuación, se recurre a métodos que transfieren dicha complejidad a coeficientes que posteriormente se definirán en forma racional o experimental, o combinando ambos planteos.

Para la integración del primer sumando, se considera a la superficie de control, formada por cuadriláteros finitos, de magnitud apropiada para la exactitud requerida, tal como puede ser apreciado en la figura. Evidentemente a mayor valor de las superficies consideradas menor será la aproximación a la realidad.

En cada cuadrilátero se plantea la Velocidad media como un vector $\overline{U}$ que se obtiene de considerar los siguientes conceptos:

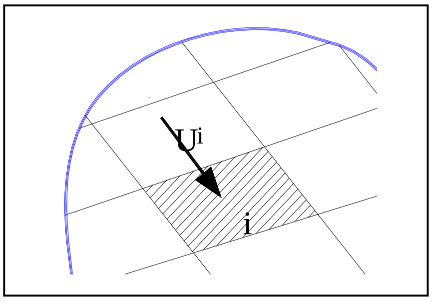
$$\int_{\Omega} \rho\, \overline{V}\,\overline{V}\, d\overline{\Omega} = \int_{\Omega} \rho\, \overline{V}^2\, d\overline{\Omega} = \rho\beta U^2 \overline{\Omega} = \rho\beta\overline{U}Q$$

En la que:

U = vector velocidad media para de la superficie finita $\overline{\Omega}$;

β = coeficiente de Boussinesq, función de la distribución de velocidades:

$$\beta = \int_{\Omega} \rho \frac{V^2\, d\Omega}{\rho\, U^2\, \Omega}$$



si ρ = cte.:

$$\beta = \frac{\rho \int_{\Omega} V^2\, d\Omega}{\rho\, U^2\, \Omega} = \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}\left(\frac{V}{U}\right)^2 d\Omega$$

Justamente, el artificio adelantado para la integración, consiste en plantear la igualdad de la integral con una expresión que implique el mismo concepto, pero referido a la velocidad media $\overline{U}$ y la superficie finita $\overline{\Omega}$. De ésta forma se transfiere el problema de la integración al coeficiente ®, pero se adelanta que en los escurrimientos unidimensionales y turbulentos, probaremos que éste valor es aproximadamente 1.

Finalmente, la **ecuación de la cantidad de movimiento, al reemplazar en el primer sumando, la integral por una sumatoria adecuada a la exactitud requerida,** queda:

$$\boxed{\overline{F} = \underbrace{\sum_{1=1}^{i=n} (\rho_i\, Q_i \beta_i\, \overline{U}_i)}_{\text{Suma de las cantidades del movimiento total de partes del área en que se ha dividido la superficie de control}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \overline{V}\, d\tau}_{\text{Variación en el tiempo de la cantidad de movimiento de la masa contenida en el volumen de control}}}$$

Nota: Si se encara con rigor matemático la expresión anterior podría considerarse que no es lógico un sumando con sumatorias y otro con una integral, por lo que solo tiene valor conceptual y como paso intermedio, mientras se evalúa el segundo sumando. Como nuestras aplicaciones serán para regímenes permanentes el mismo se anula y queda así, soslayada cualquier duda sobre la bondad de su aplicación.

Es de destacar que el signo de la fuerza actuante se determina en función del sentido del caudal con respecto a la sección considerada, adoptándose como positivo (+) cuando en caudal egresa del volumen de control y negativo (-) cuando ingresa.

4. APLICACIÓN AL ESCURRIMIENTO UNIDIMENSIONAL

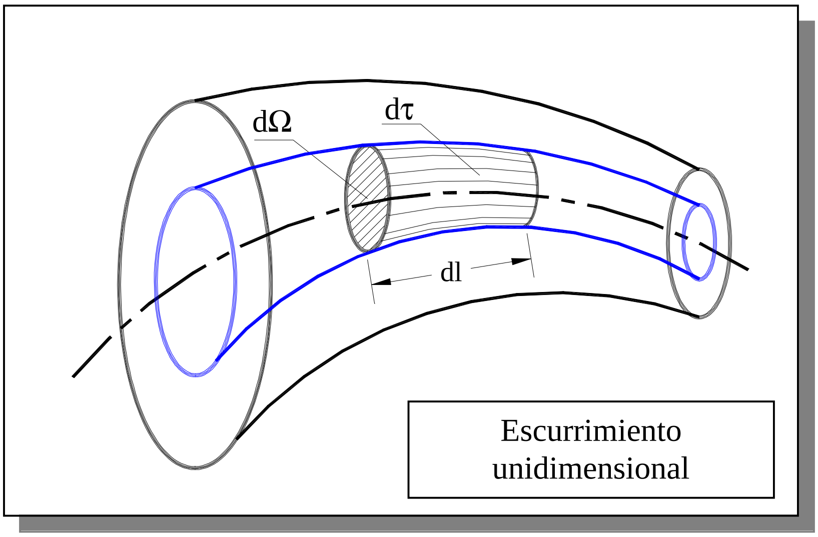
4.1. DEDUCCIÓN DE LA EXPRESIÓN

En el caso de la aplicación a un volumen de control muy particular, el tubo de corriente, necesariamente referido a la terna intrínseca y con su propiedad distintiva de ser impermeable (imposibilidad de componentes normales) hace que la sumatoria se reduzca a solo dos términos, ingreso y salida, por lo que el primer sumando se reduce a:

$$\sum_{1=1}^{1=2} (\rho_1 Q_i\, \beta_i\, \overline{U}_i)$$

Para el segundo sumando al ser:

$$d\tau = d\Omega\, d\,l$$



La integral del segundo sumando se puede escribir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho\,\overline{V}\,d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho\,\overline{V}\,d\,\overline{l}\,\overline{d\Omega} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{l}\rho\,dl\int_{\Omega}\overline{V}\,\overline{d\Omega} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{l}\rho\,Q\,dl$$

Entonces la ecuación de la cantidad de movimiento, para escurrimiento unidimensional, puede ser escrita como sigue:

$$\overline{F} = \sum_{1=1}^{1=2}(\rho_1 Q_i\,\beta_i\,\overline{U}_i) + \frac{\partial}{\partial t}\int_{l}\rho\,Q\,dl$$

Nota: En el caso de que el caudal no varíe con el tiempo, el Q permanece constante.

Para el caso del escurrimiento permanente, evidentemente Q = cte. y

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho Q\,dl = 0$$

Por lo que la expresión, para fluido “incompresible” (ρ=cte. y caso común de la práctica) se reduce a:

$$\boxed{\overline{F} = \rho\,Q\sum_{1=1}^{i=2}\beta\,\overline{U})}$$

Para el caso de considerar Coordenada Cartesianas, las expresiones de la proyecciones en los tres ejes x,y;z, resultan:

$$\begin{cases} F_x = \rho\, Q \sum(\beta U_x) \\ F_y = \rho\, Q \sum(\beta U_y) \\ F_z = \rho Q \sum(\beta U_z) \end{cases}$$

La anterior tiene validez cuando se consideran las fuerzas actuantes sobre estructuras, por parte de un número determinado de escurrimientos unidimensionales.

4.2. METODOLOGÍA PARA LA APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN

a) Elección de un volumen de control, con la necesaria amplitud para que el elemento en estudio, sobre el que se determinarán las acciones, quede perfectamente delimitado y se le pueda aplicar el concepto de "cuerpo libre en equilibrio con las fuerzas actuantes".

b) El volumen debe estar totalmente lleno del líquido cuyas acciones se evalúan

c) La resultante de todas las fuerzas $\overline{F}$ debe incluir todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control.

d) El vector velocidad media $\overline{U}$ resulta del caudal Q que atraviesa la porción de superficie de control considerada. Se lo considera aplicado en el baricentro de la sección de referencia y en la dirección normal a la misma.

e) Cada producto $(\rho_1 Q_i\, \beta_i \overline{U_i})$ que integra la sumatoria será un vector con la misma dirección del vector velocidad y con el sentido que lleva el escurrimiento al pasar por la superficie considerada.

f) Para el signo se adopta la convención (previamente adelantada) de considerar positivas a las fuerzas provenientes de caudales salientes del volumen de control y negativos para el caso de caudales entrantes.

4.3. ECUACIÓN DE LA ACCIÓN DINÁMICA PARA EL TUBO DE CORRIENTE

Llamando $\sum \bar{fe}$ a todas las fuerzas de los fluidos, y **R** a la reacción, se tiene:

$$\overline{F} = \sum \overline{fe} + \overline{R}$$

Aplicado a un tubo de corriente, considerado como volumen de control, **teniendo en cuenta la convención de signos adoptada** y cambiando la nomenclatura, indicando como final f, al subíndice 2, e inicial i al subíndice 1, se puede escribir:

$$\sum \overline{fe} + \overline{R} = \rho Q (\beta_f \overline{U}_f - \beta_i \overline{U}_i)$$

Multiplicando por (-1): $$-(\sum \overline{fe} + \overline{R}) = \rho Q (\beta_i \overline{U}_i - \beta_f \overline{U}_f)$$

Si se tiene en cuenta que la reacción es igual a menos la acción, se puede escribir:

$$-\overline{R} = \overline{A}$$

Donde:

$\overline{R}$: es la acción del borde que contienen al escurrimiento;

$\overline{A}$: es la acción del escurrimiento sobre el borde.

Finalmente, al explicitar la Acción sobre los contornos que delimitan el escurrimiento, queda:

$$\boxed{\overline{A} = \rho Q (\beta_i \overline{U}_i - \beta_f \overline{U}_f) + \sum \overline{fe}}$$

En coordenadas cartesianas: $$\begin{cases} A_x = \rho Q (\beta_i U_{ix} - \beta_f U_{fx}) + \sum fe_x \\ A_y = \rho Q (\beta_i U_{iy} - \beta_f U_{fy}) + \sum fe_y \\ A_z = \rho Q (\beta_i U_{iz} - \beta_f U_{fz}) + \sum fe_z \end{cases}$$

La anterior constituye la Ecuación de la Acción Dinámica, de gran utilidad en la Hidráulica General.

5. METODOLOGÍA PAR LA APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN

a) Elección de un volumen de control, con la necesaria amplitud para que el elemento en estudio, sobre el que se determinarán las acciones, quede perfectamente delimitado y se le pueda aplicar el concepto de “cuerpo libre en equilibrio con las fuerzas actuantes”.

b) El volumen debe estar totalmente lleno del líquido cuyas acciones se evalúan

c) La resultante de todas las fuerzas $\overline{F}$ debe incluir todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control.

d) El vector velocidad media $\overline{U}$ resulta del caudal Q que atraviesa la porción de superficie de control considerada. Se lo considera aplicado en el baricentro de la sección de referencia y en la dirección normal a la misma.

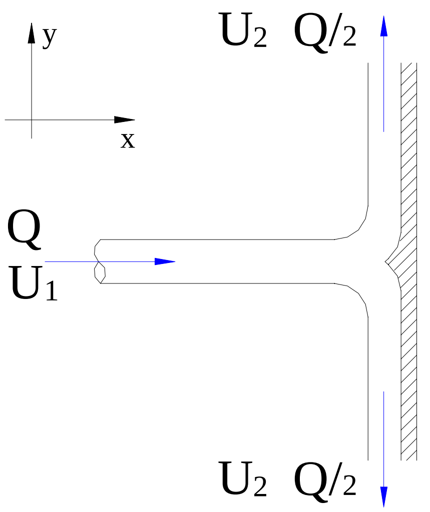
e) Cada producto $(\rho_1 Q_i\, \beta_i\, \overline{U}_i)$ que integra la sumatoria será un vector con la misma dirección del vector velocidad y con el sentido que lleva el escurrimiento al pasar por la superficie considerada.

f) Para el signo se adopta la convención (previamente adelantada) de considerar positivas a las fuerzas provenientes de caudales salientes del volumen de control y negativos para el caso de caudales entrantes.

6. APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ACCIÓN DINÁMICA, EJEMPLOS DE APLICACIÓN

6.1. ACCIÓN DE UN CHORRO SOBRE UNA PLACA FIJA PERPENDICULAR AL CHORRO Y OTRA INCLINADA.

a) Placa perpendicular al chorro



Frente a la magnitud de las energías de velocidad y considerando que las presiones actuantes en los chorros son las atmosféricas (presiones relativas nulas), las ecuaciones de las proyecciones de la Acción resultan:

En éstos casos, nos conviene trabajar con las Proyecciones, para poder realizar los planteos analíticos correspondientes.

Para el caso que nos ocupa, la simetría con respecto al plano del dibujo, posibilita trabajar en el mismo.

Considerando despreciables las acciones debidas a las presiones y las resistencias superficiales frente a la magnitud de las energías de velocidad y considerando que las presiones actuantes en los chorros son las atmosféricas (presiones relativas nulas), las ecuaciones de las proyecciones de la Acción resultan:

$$A_x = \rho Q(\beta_1 U_{1x} - \beta_2 U_{2x}) + \sum fe_x$$
$$A_y = \rho Q(\beta_1 U_{1y} - \beta_2 U_{2y}) + \sum fe_y$$

En las que $\beta \cong 1$ (se probará fácilmente)

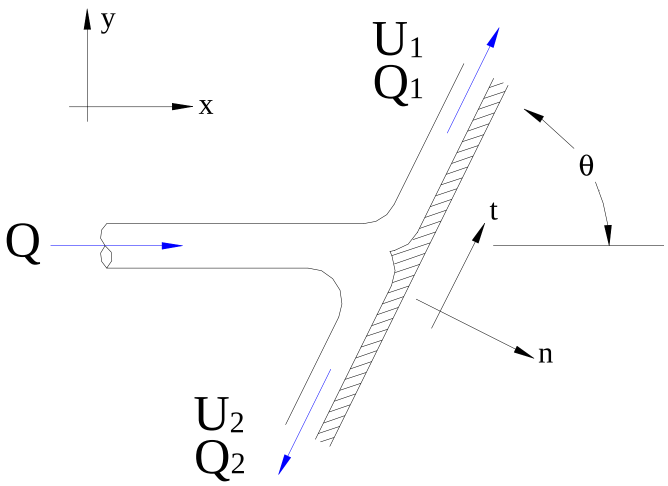
$$A_x = \rho Q (U_{1x} - 0)$$

$$A_y = \rho Q (0 + \frac{1}{2} U_{2y} - \frac{1}{2} U_{2y}) = 0$$

La acción resultante está dada por la componente según x, puesto que las según y se anulan por tener dirección contraria y ser de igual valor. Consecuentemente la acción resulta:

$$\left|\overline{A}\right| = A_x = \rho Q U_{1x}$$

b) Aplicación a una placa inclinada con respecto al chorro



$$A_t = \rho Q U \cos\theta - (\rho Q_1 U - \rho Q_2 U)$$

$$A_n = \rho Q U \operatorname{sen}\theta$$

Como en t no hay acciones por no haber rozamiento:

$$Q \cos\theta - Q_1 + Q_2 = 0$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad \text{(continuidad)}$$

Resolviendo:

$$Q_1 = \frac{Q}{2}(1 + \cos\theta)$$

$$Q_2 = \frac{Q}{2}(1 - \cos\theta)$$

Nótese que si se consideran formas de placas adecuadas (álabes cuyas formas tienden a maximizar la acción) unidas a una rueda, la acción proveniente del chorro líquido puede ser utilizada para obtener potencia y de ella generar energía.

Con la exposición breve de éste concepto, que será obviamente ampliado en el capítulo correspondiente, se pretende destacar la importancia que la ecuación de la "Acción Dinámica" **tiene en el desarrollo de las Máquinas Hidráulicas**, al constituir precisamente, la base de las ecuaciones fundamentales que posibilitan su diseño y su selección.

6.2. ACCIÓN SOBRE CONDUCTOS CERRADOS

a) Teoría del "Codo Reductor"

Es de destacar que el denominado "Codo reductor" es un tubo de corriente, que varía de sección en el recorrido y de dirección en el e espacio.

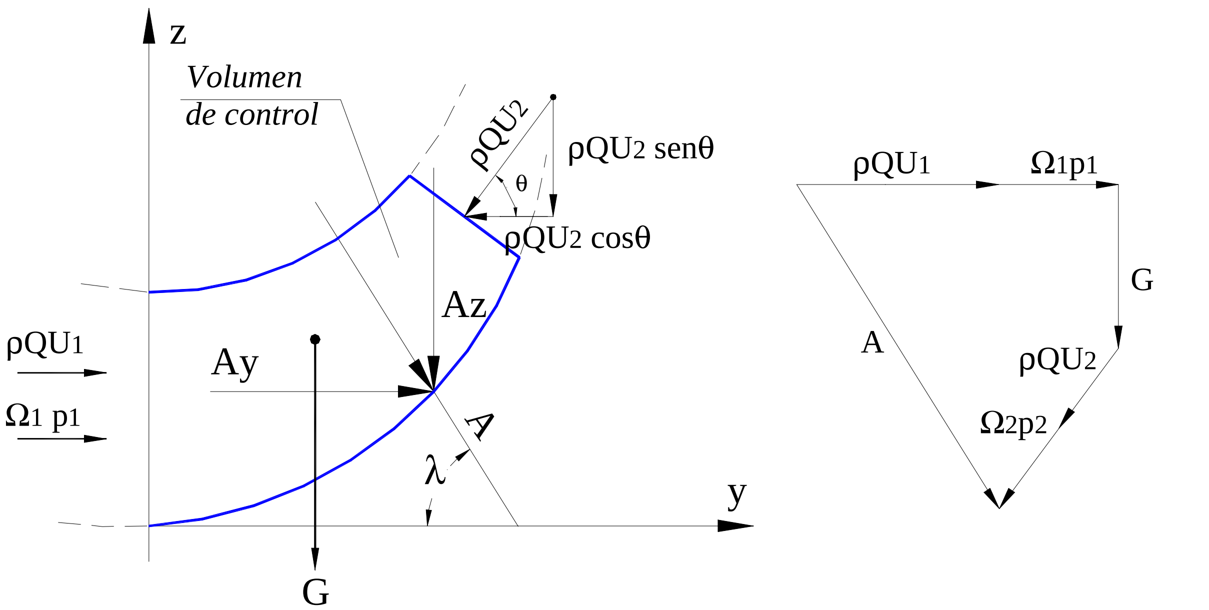
Su aplicación práctica es muy importante, puesto que un gran número de accesorios usuales de la práctica de las conducciones a presión, constituyen casos particulares del mismo. Tales son los casos de las curvas a 90°, 45°. 22° 30´, en las que generalmente el diámetro permanece constante.

Por lo tanto las ecuaciones tiene validez para toso los accesorios nombrados.

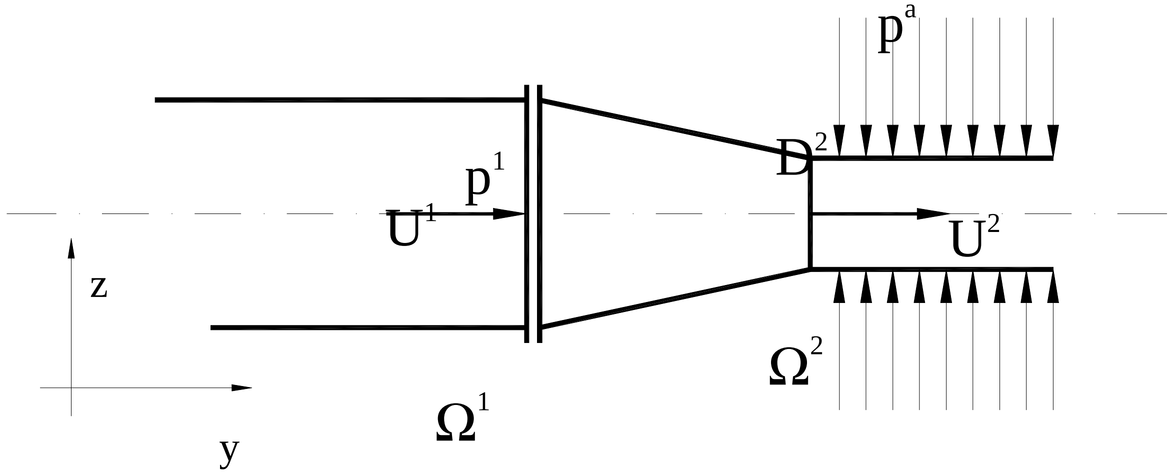
$$A_y = \rho Q (U_1 - U_2 \cos\theta) + \Omega_1 p_1 - \Omega_2 p_2 \cos\theta$$

$$A_z = -\rho Q U_2 \operatorname{sen}\theta - G - \Omega_2 p_2 \operatorname{sen}\theta$$

El módulo de la acción resulta: $\left|\overline{A}\right| = \sqrt{A_y^{\,2} + A_z^{\,2}}$



b) Inyector



En realidad constituye el caso particular de “Codo reductor” en que varía la sección pero no cambia la dirección.

Las ecuaciones son

$$\begin{cases} A_y = \rho Q\,(U_1 - U_2) + \Omega_1\, p_1 \\ A_z = 0 \end{cases}$$

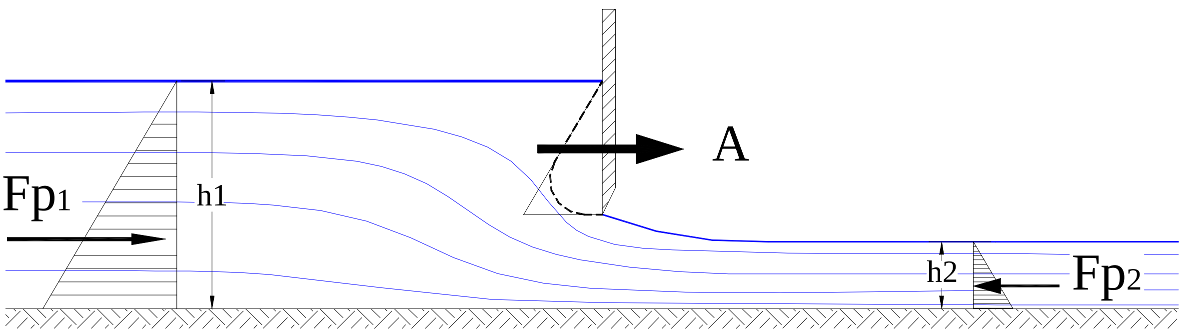
Nota: Nótese que las acciones obtenidas posibilitan el diseño de las instalaciones para su neutralización, los bulones de las bridas en número y dimensiones para el caso del inyector, muertos de Hormigón para acciones en curvas, correas de acero a los mismos efectos, etc.

6.3. ACCIÓN PARA UN CASO USUAL DE SUPERFICIE LIBRE

Se analiza el caso de la figura, en el que se esquematiza una compuerta que posibilita pasar el caudal con una determinada abertura. El objeto es el de calcular la Acción sobre la placa, para los distintos grados de abertura.

Despreciando fuerzas de rozamiento la expresión de la Acción resulta:

$$A = \rho Q (U_1 - U_2) + Fp_1 - Fp_2$$



Nota: No tener en cuenta el rozamiento implica considerar al canal horizontal, lo que no introduce error en términos de aproximación tecnológica, aúnque éste no resultar así como es lo habitual. Éste concepto que será probado cuando se estudie el capítulo correspondiente a Canales.

Con:

$$Fp_1 = \frac{1}{2}\gamma h_1^2 \qquad Fp_2 = \frac{1}{2}\gamma h_2^2$$

$$U_1 = \frac{Q}{h_1 1} \qquad U_2 = \frac{Q}{h_2 1}$$

Reemplazando, la acción actuante resulta:

$$\boxed{A = \rho\ Q^2\ \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)\ +\ \frac{1}{2}\,\gamma\ \left(h_1^2 - h_2^2\right)}$$

Como era de esperar la magnitud de la Acción, es función del grado de abertura, que define los valores de las variables h_1 y h_2.

Se agradece la Profesor Asociado de la Materia, Ing. Adolfo Guitelman, la incorporación de este último problema al texto.