UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA

Cátedra de “Construcciones Hidráulicas”

“Tuberías en Serie y en Paralelo”

Ing. Luis E. Pérez Farrás

- Noviembre 2003 -

TUBERÍAS EN SERIE Y EN PARALELO

INDICE

El Autor agradece la colaboración del Ing. Roberto Pérez, Profesor Titular de las Cátedras de Hidráulica General e Hidráulica Aplicada, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (FI UNPSJB), sede Comodoro Rivadavia, por la meticulosa revisión realizada del original, la optimización recomendada y los consejos tenidos en cuenta para la edición del presente trabajo.

TUBERÍAS EN SERIE Y EN PARALELO

1.- GENERALIDADES Y OBJETIVOS

El propósito del presente texto es el de presentar el cálculo hidráulico de las tuberías en serie y en paralelo y la forma de encarar la solución de ambos problemas, planteando las ecuaciones necesarias a tales efectos.

La asignatura Hidráulica General, en su fase previa enseña a disponer de dos herramientas para el cálculo de tuberías, ambas provenientes de consideraciones distintivas sobre la ecuación de Darcy - Weisbach.

En el capítulo correspondiente de la materia se ha demostrado que la misma presenta la forma:

$$j = \frac{f}{D}\,\frac{U^2}{2g}$$

En la que

- j es la pérdida unitaria de energía o pérdida unitaria de carga
- f es el coeficiente de fricción, que se ha probado resulta función de las variables

$$U\ ;\ \rho\ ;\ D\ ;\ \mu\ ;\ k$$

las que se recuerda son:

- U *es la* velocidad media en la sección,
- ρ es la masa específica del agua,
- D diámetro interno o “hidráulico“ de la conducción,
- μ viscosidad absoluta del agua (función de la temperatura de la misma),
- k “rugosidad absoluta” de la tubería

Si en la expresión nombrada se reemplaza la velocidad media U en función del caudal y la sección transversal (ecuación de continuidad) y además se sustituye el coeficiente de fricción por la relación:

$$f = 8\,g\,b$$

En la que g es la aceleración normal de la gravedad y b un coeficiente empírico investigado por numerosas instituciones y autores.

Una vez elaboradas las constantes implícitas, se obtiene la expresión:

$$j = 6{,}48\ b\ \frac{Q^2}{D^5}$$

La cual es la ecuación de Darcy - Weisbach expresada de manera tal que pueda representar a todas las fórmulas empíricas existentes.

La primera forma en función del coeficiente de fricción f, es de suma utilidad para ser aplicada con los criterios racionales, fundados en la moderna teoría fluidodinámica corroborada y adecuada por la experimentación. Su gran ventaja radica no solo en su racionalidad sino que además posibilita su aplicación con criterio universal, es decir a gran número de fluidos en distintas condiciones de temperatura y aún en tuberías no circulares.

La segunda en función del coeficiente b, da lugar a las distintas expresiones empíricas que existen. El coeficiente b, es función de las características experimentales tenidas en cuenta en cada caso y permite pasar revista a las numerosas expresiones existentes.

En el extremo de menor aproximación, la expresión de Dupuit, la más antigua fórmula conocida, toma $b = 50$.

En cambio en el extremo de mayor precisión dentro de las expresiones empíricas, la más utilizada modernamente es la de Hazen y Williams.

La misma se obtiene de reemplazar en la expresión general el valor de *b* obtenido en forma experimental y teniendo en cuenta la variación de las variables involucradas aún las que actúan en forma sutil (el valor de *b* para la expresión que nos ocupa es una función empírica particularmente compleja de la relación entre las variables intervinientes).

La expresión de Hazen y Williams resulta finalmente:

$$j = \frac{1}{(0{,}275\, C)^{1{,}85}} \; \frac{Q^{1{,}85}}{D^{4{,}85}}$$

En la que C es una constante que mide la rugosidad del material de la conducción

La expresión de referencia, al igual que todas las empíricas tiene limitaciones conceptuales notables con respecto a las expresiones que se obtienen con el criterio racional.

Sólo son válidas para escurrimiento de agua en régimen plenamente turbulento y no contempla variaciones por temperatura, por lo que sus aplicaciones, cuanto más alejadas de las temperaturas de experimentación y formulación, hacen más inexacta su aplicación.

En apretada síntesis, la diferencia esencial entre ambas metodologías, racional o empírica (además que la primera tiene carácter de universal y la segunda es solo aplicable al agua en régimen turbulento y tuberías circulares) radica que en las primeras la rugosidad es un concepto relativo función del Número de Reynolds y de la rugosidad absoluta, mientras que en el segundo la rugosidad se toma como una propiedad absoluta de cada material. En particular es en éste concepto donde radica la mucho mayor riqueza conceptual del primer criterio en relación con las expresiones empíricas.

Pero es justamente esta menor justeza conceptual la que posibilita el cálculo, sobre todo de situaciones más complejas como las que se analizan en el presente texto.

Como el cálculo de conducciones hidráulicas dista mucho de ser exacto, las aproximaciones que con ellas se logran, resultan satisfactorias en el campo de las aplicaciones tecnológicas. El Ingeniero deberá decidir, en última instancia y en función de su disponibilidad o facilidad de utilización, cuál es la herramienta de cálculo más útil a sus objetivos.

En el presente texto se analizará el cálculo de conducciones en serie y en paralelo, planteando las ecuaciones básicas para el cálculo, destacando la dificultad de realizar el mismo con las ecuaciones racionales y brindando la solución utilizando la ecuación de Hazen y Williams.

Es de destacar que actualmente existen sofisticados y relativamente costosos utilitarios que posibilitan el cálculo con los criterios racionales. Pero también es cierto que los valores a ser obtenidos para la solución del problema, utilizando la expresión de Hazen y Williams (obviamente limitada al escurrimiento de agua en régimen turbulento en conducciones circulares) son lo suficientemente aproximados a pesar de su menor precisión conceptual, obteniéndose valores prácticamente concordantes con los de la teoría racional, al menos en términos de aplicación tecnológica.

Es oportuno señalar que en los casos de aplicación en el campo de la Hidráulica en general, cuando los tramos son relativamente largos, las pérdidas localizadas resultan tener un efecto despreciable. Por ésta razón se encaran ambas soluciones, sin o con consideración de las mismas.

En instalaciones cortas con numerosos accesorios esta consideración no debe hacerse, lo que es habitual en instalaciones industriales.

Cuando se regulan caudales, obviamente accionando válvulas para producir pérdidas de carga expresamente a esos efectos, tampoco es posible no considerarlas, ya que las mismas son expresamente las causales de la regulación.

<u>Nota</u>: Los acueductos regulados con válvulas al pie constituyen un claro ejemplo. Sobre el final del desarrollo de tuberías en serie se realiza una breve interpretación del concepto vertido.

2.- TUBERÍAS EN SERIE

2.1.- Planteo y desarrollo del problema

En el esquema de la figura se interpreta el problema. En la misma puede apreciarse una serie de *n* ramales en serie, lo que implica como condiciones de borde que el caudal es el mismo en los tramos que, en el caso mas general, pueden ser de distintas longitudes, con tuberías de distintos materiales y diámetros. La otra condición de borde es que la suma de las pérdidas de energía iguala a la energía disponible, dada por la diferencia de cotas entre nivel de ingreso aguas arriba y nivel de llegada aguas abajo.

En símbolos

$$Q = cte.$$
$$H = \Delta J_1 + \Delta J_2 + \dots\dots\dots + \Delta J_n$$

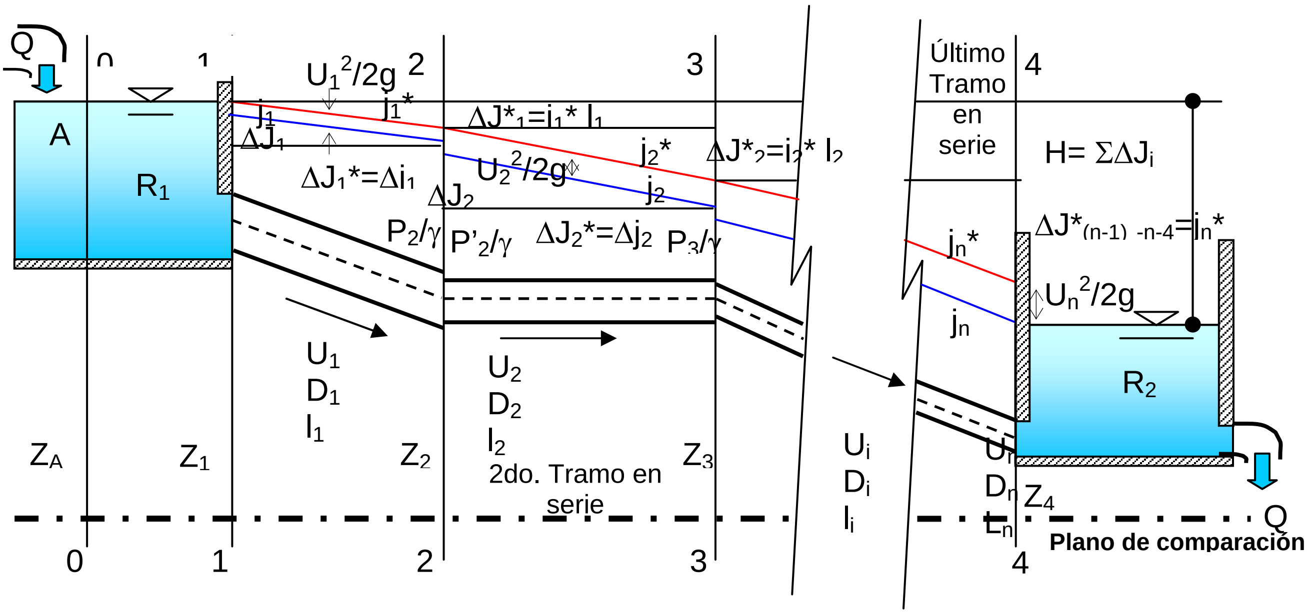

Figura 1
Conducción con *n* tramos de Tuberías en Serie

Además de la figura puede interpretarse claramente, en cada tramo de diámetro constante, que las pérdidas de energía totales son iguales, a las “pérdidas de carga”. Se recuerda que el tema es analizado en profundidad cuando se trata la interpretación de la expresión de Bernoulli, para escurrimiento unidimensional en régimen uniforme de líquido real, en el capítulo correspondiente.

Por lo expuesto precedentemente surge que es indistinto expresar las ecuaciones como “Pérdidas de energía total” o como “Pérdidas de carga”. En el desarrollo que sigue se utiliza esta última por ser la más utilizada en la práctica, cuando no se consideren pérdidas localizadas (caso muy frecuente) en cambio se utilizan las expresiones en función de la pérdida de energía total, cuando sean consideradas, atendiendo al mayor rigor tecnológico de la aplicación.

Son datos del problema las longitudes, materiales y diámetros de las tuberías de los distintos tramos en serie, como así también el desnivel topográfico H, coincidente conceptualmente, con la energía o “carga “ total disponible. La incógnita es el caudal que erogará por la instalación.

Es evidente que las ecuaciones obtenidas posibilitan encarar, las soluciones de la gran variedad de opciones de cálculos en función de datos e incógnitas, y resolver su problemática.

2.2.- Solución con los criterios racionales

2.2.1.- Sin considerar pérdidas localizadas y suponiendo coincidentes la línea de energía total con la energía piezométrica

Se hace presente que cuando se trató la expresión de Bernoulli, se destacó que en aplicaciones de la práctica (acueductos y redes de agua a presión) los términos de energía cinética resultan en general irrelevantes ante los correspondientes a la presión. Consecuentemente con esa simplificación la línea de energía total y la línea de energía piezométrica se confunden haciendo notablemente mas sencilla la resolución.

Recordando además la segunda de las ecuaciones de condición de borde, expresada como “pérdidas de carga” en función de la simplificación adoptada, para régimen permanente se tiene que:

$$Q = cte.$$
$$H = \Delta J_1 + \Delta J_2 + ... + \Delta J_n$$

Nota: Se recuerda que el término de energía cinética del tramo final en coincidencia con la entrada al reservorio, es en realidad una pérdida localizada por “entrada a depósito” en la que $k = 1$, y considerada en éste caso despreciable como el resto de las pérdidas localizadas de toda la instalación.

Las pérdidas generales en los distintos tramos de tuberías en serie resultan:

$$\Delta J_1 = \frac{f_1}{D_1}\frac{U^2}{2\,g} = \frac{f_1}{2g\,D_1}\frac{Q^2}{\pi^2 D_1^4 / 16} = \frac{8}{g\,\pi^2\,D_1^5} f_1\;Q^2 = A\;f_1\;Q^2$$

En la que A es una constante propia para el primer tramo de diámetro dado. Designando como $B, C; ... ; N$ las constantes propias de los distintos tramos, las expresiones de las pérdidas de carga se reducen a:

$$\Delta J_2 = B\ f_2\ Q^2$$
$$\Delta J_3 = C\ f_3\ Q^2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta J_n = N\ f_n\ Q^2$$

Consecuentemente, la energía total disponible resulta:

$$H = A\ f_1\ Q^2 + B\ f_2\ Q^2 + \dots\dots + N\ f_n\ Q^2 =$$
$$\left(A\ f_1 + B\ f_2 + \dots\dots + N\ f_n\right)\ Q^2$$

Por lo que el caudal se obtiene de despejarlo de la fórmula anterior, resultando:

$$Q = \sqrt{\frac{H}{A\ f_1 + B\ f_2 + \dots\dots + N\ f_n}}$$

La solución definitiva consiste para la determinación de los distintos términos de fricción para cada tramo, éstos deben calcularse por métodos iterativos, dado que son funciones de las cinco variables previamente recordadas y en especial del diámetro y la velocidad media.

Los utilitarios que ofrece el mercado resuelven el problema planteado con solvencia y posibilitando todo tipo de cálculos para los distintos fluidos y secciones transversales de conducciones.

2.2.2.- Considerando pérdidas de energía localizadas

En este caso las pérdidas de energía localizadas se toman en cuenta considerando su ecuación general y la suma de todas las pérdidas en la instalación. En efecto, si se tienen e toda la instalación j singularidades generadoras de pérdidas localizadas, la energía total disponible queda:

$$H = A\ f_1\ Q^2 + B\ f_2\ Q^2 + \dots\dots + N\ f_n\ Q^2 + \sum_{i=1}^{i=j} J_{li} =$$
$$\left(A\ f_1 + B\ f_2 + \dots\dots + N\ f_n\right)\ Q^2 + \sum_{i=1}^{i=j} J_{li}$$

En la que:

$$J_{li} = k_{li} \frac{U_i^2}{2\ g} = k_{li} \frac{Q_i^2}{2\ g\ \Omega_i^2} = \frac{16\ k_{li}}{2\ g\ \pi^2\ D_i^4}\ Q^2 = \eta_i\ Q^2$$

En la que el coeficiente η para cada tramo i, es una constante para cada accesorio en particular, con lo que su sumatoria constituye en consecuencia una constante para la instalación. La ecuación general queda entonces:

$$H = \left(A\ f_1 + B\ f_2 + ... + N\ f_n + \sum_{i=1}^{i=j} \eta_i \right) Q^2$$

De donde:

$$Q = \sqrt{\frac{H}{A\ f_1 + B\ f_2 + ... + N\ f_n + \sum_{i=1}^{i=j} \eta_i}}$$

En la que nuevamente, el problema queda planteado en la determinación de los distintos términos de fricción para cada tramo, éstos deben calcularse por métodos iterativos, dado que son funciones de las cinco variables previamente recordadas y en especial del diámetro y la velocidad Media. Sólo difiere del caso anterior en el que el denominador se debe considerar la constante para una dada instalación, que constituye la suma de todas las pérdidas localizadas.

Al igual que en el caso anterior, exiten utilitarios que resuelven eficientemente el cálculo hidráulico. La consideración de las pérdidas de energía localizadas en realidad constituyen, para la confección del programa, un problema menor.

2.3.- Solución en conducciones de agua con la expresión de Hazen y Williams

Es oportuno señalar que el procedimiento a seguir es igualmente válido para cualquier expresión empírica. Se utiliza la de Hazen y Williams por ser la más difundida y actualizada.

2.3.1.- Sin considerar pérdidasde energía localizadas y suponiendo coincidentes la línea de energía total y la línea de energía piezométrica

Se recuerda nuevamente que cuando se trató la expresión de Bernoulli, se destacó que en aplicaciones de la práctica (acueductos y redes de agua a presión) los términos de energía cinética resultan en general irrelevantes ante los correspondientes a la presión. Consecuentemente con esa simplificación, la línea de energía total y la de energía piezomética se confunden en una sola, simplificando la solución notablemente.

De la segunda de las ecuaciones condición de borde, expresada como "pérdidas de carga" en función de la simplificación adoptada, se tiene que:

$$Q = cte.$$
$$H = \Delta J_1 + \Delta J_2 + \dots\dots\dots + \Delta J_n$$

Nota: Se recuerda que el término de energía cinética del tramo final es en realidad una pérdida localizada por "entrada a depósito" en la que $k_l = 1$, y considerada en éste caso despreciable como el resto de las pérdidas localizadas de toda la instalación.

Utilizando la expresión de Hazen y Williams para la evaluación de las pérdidas de energía hidráulica en cada tramo se tiene:

$$\Delta J_1 = \frac{l_1}{(0{,}275\ C_1)^{1{,}85}\ D_1^{4{,}85}}\ Q^{1{,}85} = A\ Q^{1{,}85} \quad \therefore \quad A = \frac{l_1}{(0{,}275\ C_1)^{1{,}85}\ D_1^{4{,}85}}$$
$$\Delta J_2 = \frac{l_2}{(0{,}275\ C_2)^{1{,}85}\ D_2^{4{,}85}}\ Q^{1{,}85} = B\ Q^{1{,}85} \quad \therefore \quad B = \frac{l_2}{(0{,}275\ C_2)^{1{,}85}\ D_2^{4{,}85}}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta J_n = \frac{l_1}{(0{,}275\ C_n)^{1{,}85}\ D_n^{4{,}85}}\ Q^{1{,}85} = N\ Q^{1{,}85} \quad \therefore \quad N = \frac{l_n}{(0{,}275\ C_n)^{1{,}85}\ D_n^{4{,}85}}$$

Reemplazando en la expresión condición de borde y sacando al caudal como factor común:

$$H = (A + B + \dots\dots + N)\ Q^{1{,}85}$$

Despejando Q se obtiene:

$$Q = \left(\frac{H}{A + B \dots\dots + N}\right)^{0{,}54}$$

La anterior resuelve el problema sin iteraciones de ningún tipo, dado que la rugosidad C es considerada como única y propia para cada material, lo que desde el punto de vista de la rigurosidad conceptual de la ecuación, presenta claras diferencias con los criterios racionales de cálculo, los que obviamente son mucho más sutiles en lo analítico.

2.3.2.- Considerando pérdidas localizadas

En este caso las pérdidas localizadas se toman en cuenta considerando su ecuación general y la suma de todas las pérdidas en la instalación. En efecto:

$$H = (A + B + ... + N)\ Q^{1,85} + \sum_{i=1}^{i=j} J_{li}$$

En la que, en forma totalmente similar a lo analizado para el caso de las soluciones racionales:

$$J_{li} = k_{li} \frac{U_i^2}{2\ g} = k_{li} \frac{Q_i^2}{2\ g\ \Omega_i^2} = \frac{16\ k_{li}}{2\ g\ \pi^2\ D_i^4}\ Q^2 = \eta_i\ Q^2$$

En la que el coeficiente η para cada tramo i, es una constante para cada accesorio en particular, con lo que su sumatoria constituye en consecuencia una constante para la instalación. La ecuación general queda entonces:

$$H = (A + B + ... + N)\ Q^{1,85} + \sum_{i=1}^{i=j} \eta_i\ Q^2$$

La dificultad en este caso es resolver la ecuación teniendo la incógnita Q elevada a dos exponentes distintos (aunque de un orden de magnitud cercano).

El método de Raphson - Newton, posibilita encontrar la solución con un método iterativo rápidamente convergente y fácilmente programable.

Para ello se considera la anterior igualada a cero, y se la denomina como función ϕ:

$$\phi = (A + B + ... + N)\ Q^{1,85} + \sum_{i=1}^{i=j} \eta_i\ Q^2 - H = 0$$

Para el primer tanteo se adopta un valor de Q_o, se reemplaza en la ecuación y se obtendrá un resto $\Delta\phi$. Luego se obtiene el valor ΔQ_1 resolviendo la siguiente expresión, en la que $\Delta\phi$ debe considerarse con su signo:

$$\Delta Q_1 = \frac{-\ \Delta\phi}{\left(\frac{d\phi}{dQ}\right)_{Q_0}} = \frac{-\ \Delta\phi}{1,85\ (A + B .... + N)\ Q_0 + 2\sum_{i=1}^{i=n} \eta_i\ Q_0}$$

Se procede a un nuevo tanteo ahora reemplazando en la expresión original, el valor:

$$Q_1 = Q_0 + \Delta Q_1$$

Se obtiene un nuevo resto $\Delta\phi_1$ el que resultará menor al anterior. Se procede en forma análoga al paso anterior, utilizando el nuevo resto. El proceso se reitera hasta lograr valores de Q que satisfagan la ecuación con la aproximación considerada suficiente.

2.3.3.- Comentarios sobre la regulación con válvulas al pie

El efecto regulador de las válvulas consiste justamente en generar la pérdida de energía (o carga) necesaria para posibilitar la erogación del caudal requerido en función de las necesidades.

En ese caso el caudal requerido es dato del problema y la incógnita es la pérdida localizada a generar por la válvula para posibilitar su escurrimiento.

En las expresiones más generales, considerando pérdidas de carga localizadas, la consideración de la pérdida producida por la válvula debe diferenciarse claramente y ser despejada. En particular la pérdida en la válvula puede expresarse como:

$$J_{vi} = k_{lv}\,\frac{U_i^2}{2\,g} = k_v\,\frac{Q^2}{2\,g\,\Omega_i^2} = \frac{16\,k_v}{2\,g\,\pi^2\,D_i^4}\,Q^2 = \xi\,k_v\,Q^2$$

En la que:

- ξ es una constante numérica
- k_v es el coeficiente de pérdida localizada función del grado de apertura de la válvula y a obtener de su curva característica (curva k_v; grado de cierre en %).

El término de pérdidas de energía hidráulica queda, en consecuencia:

$$\sum_{i=1}^{i=j-1} \eta_i\,Q^2 + \xi\,k_v\,Q^2 = \left(\sum_{i=1}^{i=j-1} \eta_i + \xi\,k_v\right) Q^2$$

Y la expresión con las fórmulas racionales queda:

$$H = \left(A\,f_1 + B\,f_2 + ... + N\,f_n + \sum_{i=1}^{i=j-1} \eta_i + \xi\,k_v \right) Q^2$$

De la que hay que despejar k_v y de la curva característica de la válvula obtener el grado de cierre necesario de la misma que posibilitará escurrir al caudal Q requerido.

Obviamente siempre deben obtenerse por medios iterativos los valores de los coeficientes de fricción fi correspondientes a cada tramo.

El cálculo aproximado con la expresión de Hazen y Williams, que no necesita cálculos iterativos, se reduce entonces a considerar:

$$H = (A + B + \dots\dots\dots + N)\, Q^{1,85} + \left(\sum_{i=1}^{i=j-1} \eta_i + \xi\, k_v\right) Q^2 =$$

$$(A + B + \dots\dots\dots + N)\, Q^{1,85} + \sum_{i=1}^{i=j-1} \eta_i\, Q^2 + \xi\, k_v\, Q^2$$

Nuevamente, de la anterior hay que despejar k_v y de la curva característica de la válvula (curva k_v; Grado de cierre en %) se debe obtener el grado de cierre necesario de la misma, que posibilitará escurrir al caudal Q requerido.

Obviamente, cuando no se requiera el cálculo de las pérdidas localizadas (lo que es frecuente en la práctica de las instalaciones de saneamiento básico) en las anteriores el término correspondiente a las mismas se los considerará nulo.

3.- TUBERÍAS EN PARALELO

3.1.- Planteo y desarrollo del problema

El esquema de la figura posibilita analizar las variables intervinientes.

En la misma puede apreciarse como a un nudo 1 arriba un caudal Q que partir de esa sección se bifurca en n ramales en paralelo, cada uno eventualmente con tuberías de distintos materiales, diámetros y longitudes.

Evidentemente a partir del nudo 2, donde los ramales se reencuentran, el caudal suma resulta ser el original al no existir, por hipótesis de partida, derivaciones en ruta.

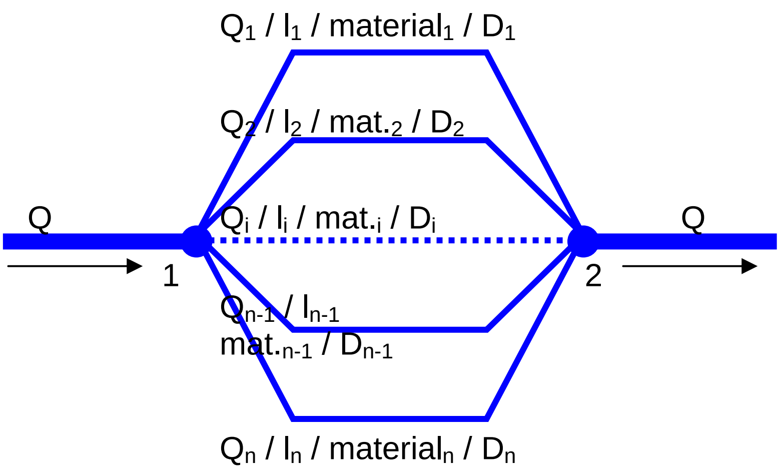

Figura 2
Tuberías en paralelo

Las condiciones de borde del problema son fáciles de interpretar, en efecto obviamente el caudal suma de los caudales derivados por cada ramal es igual al caudal total y por otra parte, la pérdida de energía (o de carga) entre ambos nudos es la misma cualquiera sea el ramal que se considere.

En símbolos se tiene que:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots\ldots + Q_n$$
$$\Delta J = \Delta J_1 = \Delta J_2 = \ldots\ldots\ldots = \Delta J_n$$

Los datos del problema son el caudal Q, las longitudes de cada ramal, como así también los materiales y diámetros de las tuberías que los integran. Las incógnitas son los caudales que pasan por cada ramal y la pérdida de carga entre las secciones o nudos 1 y 2.

Reemplazando la ecuación de Darcy - Weisbach en función del "coeficiente de fricción f" a ser evaluado según las ecuaciones racionales, se tiene

$$\Delta J = \frac{f_1}{D_1}\frac{U_1^2}{2\,g} = \frac{f_2}{D_2}\frac{U_2^2}{2\,g} = \ldots\ldots\ldots = \frac{f_n}{D_n}\frac{U_n^2}{2\,g}$$

Para un ramal genérico caracterizado por el subíndice i se tiene:

$$\Delta J_i = \frac{f_i}{D_i}\frac{U_i^2}{2\,g} = \frac{f_i}{D_i}\frac{Q_i^2}{2\,g\,\Omega_i^2} = \frac{f_i}{D_i}\frac{Q_i^2}{2\,g\,\frac{\pi^2\,D_i^4}{4}} = \xi_i\,\frac{f_i}{D_i^5}\,Q_i^2 = \eta_i\,f_i\,Q_i^2$$

$$en\ la\ que\quad \xi_i = 4\big/2\,g\,\pi^2\,D_i^4 \quad y \quad \eta_i = \xi_i\big/D_i^5$$

Las anteriores representan en cada tramo una constante numérica propia de cada instalación.

La expresión original queda entonces:

$$\Delta J = \eta_1\,f_1\,Q_1^2 = \eta_2\,f_2\,Q_2^2\,) = \ldots\ldots\ldots = \eta_i\,f_i\,Q_i^2$$

Si se consideran las pérdidas localizadas generadas por los distintos tipos de accesorios o singularidades, las mismas se evalúan con la conocida expresión:

$$J_L = k_L\,\frac{U^2}{2\,g} = a\,k_L\,Q^2$$

En la que K_L es la constante para cada accesorio y *a* la constante que se obtiene de reemplazar la velocidad media por la ecuación de continuidad (la sección transversal es entonces una constante para cada diámetro)

Si se consideran n accesorios generando pérdidas de enrgía localizadas en cada uno de los ramales, la expresión anterior queda:

$$\Delta J_T = \left(\eta_1 \ f_1 + \sum_{j=1}^{j=n} a_1 \ k_{l1} \right) Q_1^2 = \left(\eta_2 \ f_2 + \sum_{j=1}^{j=n} a_2 \ k_{L2} \right) Q_2^2 = \dots\dots\dots\dots = \left(\eta_i \ f_i + \sum_{j=1}^{j=n} a_i \ k_{Li} \right) Q_i^2$$

En las que las sumatorias indican las suma de todas las pérdidas localizadas de energía en cada tramo y que resultan constantes para una dada instalación.

3.2.- Solución con los criterios racionales

La dificultad se encuentra en que los términos fi de la expresión anterior, no son independientes del caudal y del diámetro, por lo que en cada tramo el coeficiente de fricción es entre otras variables, función del caudal que escurre en cada ramal y de la rugosidad absoluta k del material de la tubería.

Es por ello que necesariamente los métodos de cálculo resultan iterativos y sumamente engorrosos. Los distintos proveedores de programas utilitarios resuelven el problema siguiendo caminos similares, brindando soluciones universales, es decir, válidas para una gran variedad de fluidos e incluso formas no circulares de las secciones.

El cálculo se reduce a plantear las expresiones:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{\Delta J_1}{\eta_1 \ f_1}} \ ; \ Q_2 = \sqrt{\frac{\Delta J_2}{\eta_2 \ f_2}} \ ; \ \dots\dots\dots; \ Q_n = \sqrt{\frac{\Delta J_i}{\eta_i \ f_i}} \ ; \ Q = \sqrt{\frac{\Delta J}{\eta \ f}}$$

En la que la última implica una ecuación para una tubería hipotética equivalente a todos los ramales en serie.

Al reemplazar en la ecuación:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ \dots\dots\dots \ + Q_n$$

Se obtiene:

$$\sqrt{\frac{\Delta J}{\eta \ f}} = \sqrt{\frac{\Delta J_1}{\eta_1 \ f_1}} + \sqrt{\frac{\Delta J_2}{\eta_2 \ f_2}} + \dots\dots\dots + \sqrt{\frac{\Delta J_i}{\eta_i \ f_i}}$$

Al ser las pérdidas iguales entre las secciones 1 y 2 resulta:

$$\sqrt{\frac{1}{\eta \; f}} = \sqrt{\frac{1}{\eta_1 \; f_1}} + \sqrt{\frac{1}{\eta_2 \; f_2}} + \ldots\ldots\ldots + \sqrt{\frac{1}{\eta_i \; f_i}}$$

Por lo que el coeficiente f de la tubería equivalente resulta:

$$f = \eta^2 \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\eta_1 \; f_1}\right)^{0,5} + \left(\frac{1}{\eta_2 \; f_2}\right)^{0,5} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{\eta_n \; f_n}\right)^{0,5}} \right]^2$$

Si el análisis se hubiera realizado teniendo en cuenta las pérdidas de energía localizadas, la anterior se complicaría algo sumando los términos constantes debidos a las mismas y quedando *f* expresado en la forma que sigue.

$$f = \eta^2 \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\eta_1 \; f_1 + \sum_1^n a_1 \; k_{L1}}\right)^{0,5} + \left(\frac{1}{\eta_2 \; f_2 + \sum_1^n a_2 \; k_{L2}}\right)^{0,5} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{\eta_n \; f_n + \sum_1^n a_n \; k_{Ln}}\right)^{0,5}} \right]^2$$

Determinados los coeficientes de fricción *f* de la tubería equivalente y los distintos f_i para cada tramo, por métodos necesariamente iterativos, el cálculo es inmediato.

En efecto con esos valores es fácil determinar el término de pérdida de carga igual para la tubería equivalente o los distintos ramales y con él, los distintos caudales, que deberán cumplir con que su suma iguale el caudal total.

3.3.- Solución en conducciones de agua con la expresión de Hazen y Williams

Nota: El procedimiento a seguir es igualmente válido para cualquier expresión empírica. Se utiliza la de Hazen y Williams por ser la más usual y actualizada.

Se recuerda que las condiciones básicas que deben ser cumplidas son:

$$\Delta J = \Delta J_1 = \Delta J_2 = \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ = \Delta J_n$$
$$Q = Q_1 \ + \ Q_2 + \ \ldots\ldots\ \ + \ Q_n$$

En la primera, se tiene reemplazando las pérdidas en los distintos ramales en función de la expresión de Hazen y Williams:

$$\Delta J_1 = \frac{1}{(0{,}275\ C_1)^{1{,}85}\ D_1^{\ 4{,}85}}\ Q^{1{,}85} = A\ Q^{1{,}85} \quad en\ la\ que \quad A = \frac{1}{(0{,}275\ C_1)^{1{,}85}\ D_1^{\ 4{,}85}}$$

$$\Delta J_2 = \frac{1}{(0{,}275\ C_2)^{1{,}85}\ D_2^{\ 4{,}85}}\ Q^{1{,}85} = B\ Q^{1{,}85} \quad en\ la\ que \quad B = \frac{1}{(0{,}275\ C_2)^{1{,}85}\ D_2^{\ 4{,}85}}$$

....

$$\Delta J_n = \frac{1}{(0{,}275\ C_n)^{1{,}85}\ D_n^{\ 4{,}85}}\ Q^{1{,}85} = N\ Q^{1{,}85} \quad en\ la\ que \quad N = \frac{1}{(0{,}275\ C_n)^{1{,}85}\ D_n^{\ 4{,}85}}$$

En consecuencia, la pérdida de carga entre las secciones 1 y 2, en función de los datos de cada tramo y utilizando la expresión de Hazen y Williams, resulta:

$$\Delta J = A\ Q_1^{\ 1{,}85} = B\ Q_2^{\ 1{,}85} = \ ......\ = N\ Q_n^{\ 1{,}85}$$

El valor ΔJ de la expresión previa implica una pérdida equivalente de los ramales en paralelo, que puede obtenerse de considerar una tubería única hipotética, equivalente tanto en transporte de caudal como en pérdida de carga, a los n ramales en paralelo.

Ello posibilita el planteo que sigue:

$$\Delta J = \chi\ Q^{1{,}85}; \quad de\ donde \quad Q = \left(\frac{\Delta J}{\chi}\right)^{0{,}54}$$

$$\Delta J_{\ 2} = A\ Q_1^{\ 1{,}85}; \quad de\ donde \quad Q = \left(\frac{\Delta J}{A}\right)^{0{,}54}$$

$$\Delta J_3 = B\ Q_2^{\ 1{,}85}; \quad de\ donde \quad Q = \left(\frac{\Delta J}{B}\right)^{0{,}54}.$$

$$\Delta J_n = N\ Q_{(n-1)}^{\ 1{,}85} \ ; \quad de\ donde \quad Q_{(n-1)} = \left(\frac{\Delta J}{B}\right)^{0{,}54}$$

Reemplazando las anteriores en la ecuación con la condición a cumplimentar por los caudales, se tiene que:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots\ldots + Q_n$$

o lo que es equivalente:

$$\left(\frac{\Delta J}{\chi}\right)^{0,54} = \left(\frac{\Delta J_2}{B}\right)^{0,54} + \left(\frac{\Delta J_3}{C}\right)^{0,54} + \ldots + \left(\frac{\Delta J_n}{N}\right)^{0,54}$$

Teniendo en cuenta que las pérdidas en todos los tramos deben ser necesariamente iguales, se puede simplificar por lo que, finalmente:

$$\frac{1}{\chi^{0,54}} = \frac{1}{A^{0,54}} + \frac{1}{B^{0,54}} + \ldots\ldots + \frac{1}{N^{0,54}}$$

Despejando el término constante de la expresión de Hazen y Williams, para la tubería hipotética equivalente a n tramos en paralelo, se tiene:

$$\chi = \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^{0,54} + \left(\frac{1}{B}\right)^{0,54} + \ldots + \left(\frac{1}{N}\right)^{0,54}}\right]^{1,85}$$

Nota: Evidentemente carece de todo sentido calcular el diámetro, el coeficiente de rugosidad de la tubería equivalente y su longitud exacta (podría estimarse como la distancia mínima entre 1 y 2) dado que no solo no es necesario sino que además es un problema indeterminado.

La expresión anterior posibilita el cálculo de χ en función de $A, B, \ldots\ldots, N$, que son constantes para una dada instalación.

Con el valor calculado precedentemente se pueden obtener los caudales en cada rama con las expresiones:

$$Q_1 = \left(\frac{\chi}{A} \right)^{0,54} Q$$

$$Q_2 = \left(\frac{\chi}{B} \right)^{0,54} Q$$

....

$$Q_n = \left(\frac{\chi}{N} \right)^{0,54} Q$$

Las que obviamente deben verificar que:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots\ldots\ldots + Q_n$$

Lo que de resultar correcto implica, además, que el problema está bien resuelto.