

# **FUNDAMENTOS DE LA RED DE ESCURRIMIENTO Y SU APLICACIÓN A LA HIDRÁULICA DE LOS MEDIOS PERMEABLES**

**UNIVERSIDAD DE ALCALÁ DE HENARES**

Departamento de Ciencias Ambientales, Comunidad de Madrid, España

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

Facultad de Ingeniería, Departamento de Hidráulica, República Argentina

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PATAGONIA**

Facultad de Ingeniería, Departamento de Hidráulica e Ingeniería Civil

**ING. LUIS E. PÉREZ FARRÁS**  
Profesor de Hidráulica General y  
Construcciones Hidráulicas de la FIUBA

**FEBRERO DE 1996**

**NOTA DEL AUTOR:**

Entiendo es de estricta justicia expresar mi agradecimiento a mi gran amigo el Ing. Pablo Bronstein y a mi hija, Sandra Mariela Pérez, por el importante trabajo realizado por ambos, para la concreción del texto que nos ocupa.

El primero de los nombrados se encargó de la revisión final del trabajo y de la crítica, siempre constructiva al mismo. De sus consejos han surgido correcciones que posibilitarán una mejor comprensión de varios de los temas abordados. Incluso, su consejo principal, cual es el de dotar de ejemplos ilustrativos al texto, será tenido en cuenta para futuras y eventuales ediciones.

Con el mismo criterio, será tenida en cuenta para el futuro la recomendación de ampliación de los Anexos, incorporando los relativos a: Rotor, Divergencia, Ecuación de Navier Stokes y el Método de Relajación Numérica para la realización de la red por análisis numérico y ordenador.

En particular, mi hija Sandra fue la responsable de la verificación matemática y de la edición general a partir del original.

A ambos, mi reconocimiento por su gran aporte para esta pequeña obra.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Luis E. Pérez Farrás', written over a horizontal line.

**Ing. Luis E. Pérez Farrás**

**INDICE**

**1- GENERALIDADES Y OBJETIVOS .....3**

**2- FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO E HIDRÁULICA NECESARIOS PARA EL DESARROLLO DEL TEMA .....5**

2.1- CAMPOS .....5

2.2- PARTÍCULA FLUIDA Y MEDIO CONTINUO.....5

2.3- LÍNEAS QUE DESCRIBEN EL ESCURRIMIENTO - TUBO DE CORRIENTE .6

2.4- FLUJO DE UN VECTOR - CAUDAL - ESCURRIMIENTO -VELOCIDAD MEDIA.....7

2.5- CIRCULACIÓN.....1

2.6- ROTOR.....9

2.7- DIVERGENCIA .....10

2.8- DIFERENCIAL TOTAL EXACTA .....12

2.9- VECTOR GRADIENTE .....12

**3- ECUACIÓN DE CONTINUIDAD ..... 14**

**4- CONDICIÓN DE IRROTACIONALIDAD..... 16**

**5- RED DE ESCURRIMIENTO ..... 17**

5.1- EQUIPOTENCIALES .....17

5.2- ESCURRIMIENTOS BIDIMENSIONALES.....18

5.2.1- Conceptos Generales .....18

5.2.2- Líneas Equipotenciales en Dos Dimensiones .....20

5.3- LÍNEAS DE CORRIENTE (FUNCIÓN DE STOKES) .....22

**6- PROPIEDADES DE LA RED DE ESCURRIMIENTO .....25**

**7- APLICACIÓN DE LA RED DE ESCURRIMIENTO A LOS MEDIOS PERMEABLES .....28**

7.1- LA LEY DE DARCY .....28

7.2- LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD Y LA LEY DE DARCY .....29

7.3- LA RED DE ESCURRIMIENTO EN LOS MEDIOS ANISÓTROPAS.....30

<b>8- BREVE REFERENCIA A LAS METODOLOGÍAS DE TRAZADO DE LA RED .</b>	<b>33</b>
8-1- MÉTODO GRÁFICO .....	33
8-2- MÉTODOS ANALÓGICOS.....	34
8.3- MÉTODO DE LOS POTENCIALES SIMPLES .....	37
8.4- REFERENCIA AL MÉTODO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA .....	39
<b>9- CÁLCULOS ENERGÉTICOS CON LA RED DE ESCURRIMIENTO .....</b>	<b>40</b>
9.1- BREVE REFERENCIA CONCEPTUAL A LA ECUACIÓN GENERAL DE NAVIER-STOKES .....	40
9.2- INTEGRACIÓN PARA EL CASO DEL ESCURRIMIENTO EN LOS MEDIOS PERMEABLES .....	42
9.3- INTERPRETACIÓN Y CONSECUENCIAS PRÁCTICAS DE LOS ANÁLISIS PRECEDENTES.....	44
9.3.1- Aplicaciones de Bernoulli en la Línea de Corriente .....	44
9.3.2- Extensión de la Expresión de Bernoulli a todo el Campo del Esgurrimiento .....	47
<b>10- EL CÁLCULO DEL CAUDAL EN LOS MEDIOS PERMEABLES MEDIANTE LAS REDES DE ESCURRIMIENTO.....</b>	<b>53</b>
<b>ANEXO - EL VECTOR ACELERACIÓN EN COORDENADAS INTRÍNSECAS ....</b>	<b>55</b>

## **FUNDAMENTOS DE LA RED DE ESCURRIMIENTO**

### **1- GENERALIDADES Y OBJETIVOS**

El presente trabajo está dirigido a estudiantes de geología o geólogos graduados, interesados en los fundamentos hidráulicos de las redes de flujo (de escurrimiento con más propiedad) que son de gran utilidad en los estudios de la Hidráulica de las aguas subterráneas.

Está encarado con un criterio de interpretación física, más que de rigor matemático, a pesar que ésta es importante y se hace referencia a los desarrollos estrictamente necesarios. Pretende estar acotado a las reales condiciones de aplicación sin ahondar en extensos desarrollos matemáticos a los que el tema es proclive.

El objetivo central es el de brindar un texto de referencia, en el que los fundamentos queden expuestos lo más breve y concisamente posible, sin que por ello pierdan precisión conceptual.

El contenido está programado siguiendo la prioridad necesaria para su mejor comprensión, y necesariamente eslabonado, como para que los conceptos puedan ser tratados de manera ordenada. Por otra parte se pretende que el texto sea "autosuficiente", entendiéndose como tal el hecho de que todas las deducciones y conceptos necesarios se encuentren en el mismo, evitando así al lector, la necesidad de recurrir a otra bibliografía, para la interpretación de la presente.

Con esas premisas, se han desarrollado en un principio y brevemente, los conceptos necesarios del Análisis Matemático, aplicados y adaptados a la Hidráulica, cuyos conceptos básicos de utilidad posterior, son también tratados conjuntamente.

Enseguida son tenidos en cuenta los trascendentales conceptos referidos al principio de la conservación de la masa y de la circulación, ambos aplicados al escurrimiento de los fluidos.

A continuación se encara el análisis de los fundamentos de la Red de Escurrimiento, obviamente sustentados en forma totalmente eslabonada, en los conceptos desarrollados previamente.

Se desarrollan seguidamente los conceptos inherentes al escurrimiento bidimensional, de gran aplicación al escurrimiento en los medios permeables, para referirse a continuación a las propiedades generales de la red de escurrimiento.

Se pretende luego demostrar en forma sencilla, el porqué las redes son aplicables a los escurrimientos en medios permeables para pasar luego a su metodología de trazado. Para su análisis se priorizan las metodologías sencillas e intuitivas con el objetivo manifiesto de posibilitar una mejor comprensión de las redes, sin perderse en el laberinto de las dificultades numéricas o matemáticas en general, las que son resueltas por programas utilitarios con gran precisión.

Finalmente se da lugar a las posibilidades de cálculos energéticos con la red de escurrimiento (aplicaciones de la ecuación de Bernoulli) aplicadas a los medios permeables, fundamentándose así, las reglas prácticas de uso común.

Por otra parte y con el objeto preanunciado de evitar al lector la búsqueda de información en otras bibliografías, las demostraciones de conceptos fundamentales a los que inevitablemente hay que recurrir pero que no integran la estructura fundamental del temario central, se incorporan en forma de Anexos.

## 2- FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO E HIDRÁULICA NECESARIOS PARA EL DESARROLLO DEL TEMA

### 2.1- CAMPOS

Cada punto del espacio cartesiano de coordenadas  $x, y, z$  presenta un valor numérico de una dada función  $f(x; y; z)$  continua y derivable hasta el segundo orden de derivación.

Si la función representa una magnitud física escalar, en cada punto del espacio la propiedad física tendrá un determinado valor numérico y único  $f(a; b; c)$ , siendo  $a, b$  y  $c$  los valores de las coordenadas  $x, y, z$  del punto analizado.

Por ejemplo, las propiedades: masa específica  $\rho$ , peso específico  $\gamma$ , presión  $p$  y temperatura  $t$ , constituyen ejemplos evidentes de funciones de punto del espacio de tres dimensiones.

En cambio, si la función representa una propiedad física vectorial, en cada punto del espacio, para los valores  $a, b$  y  $c$ , se tiene un vector  $\vec{V}(x; y; z)$ .

Los campos de velocidades  $\vec{V}$ , aceleraciones  $\vec{a}$  y rotores  $\text{rot } \vec{V}$ , constituyen ejemplos íntimamente relacionados con los desarrollos que posteriormente tendrán lugar.

### 2.2- PARTÍCULA FLUIDA Y MEDIO CONTINUO

Es la menor porción de sustancia fluida lo suficientemente pequeña, por una parte, como para poder aplicarle los conceptos del "Punto Material" (Análisis Matemático). Pero por otra parte es, a su vez, lo suficientemente grande como para que no se pierda la identidad de la sustancia en estudio.

El medio continuo es una sucesión de partículas fluidas en movimiento (o en reposo como caso particular del mismo) sin que existan espacios vacíos ni choques entre ellas. Es una percepción "macroscópica" de la realidad. En efecto, el agua en particular y los fluidos en general, son efectivamente interpretados por nuestros sentidos como una sustancia continua y fácilmente deformable ante las sollicitaciones.

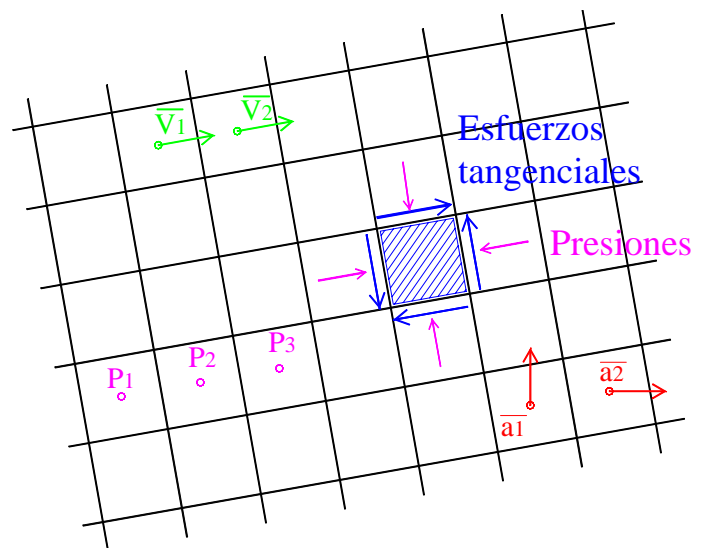


Figura 1

Interpretación según el Ing. Macagno

La imagen debida al Ing. Macagno esquematizada en la Figura 1, es sumamente ilustrativa. En efecto, en la misma, las partículas fluidas son representadas bidimensionalmente (para obtener la imagen tridimensional bastará considerar la profundidad) por cuadrángulos idealmente pequeños. En el baricentro de los mismos puede ser considerada la propiedad física de que se trate tal como puede ser apreciado tanto para las propiedades escalares como las vectoriales. En particular el campo de velocidades  $\bar{V}$  constituye la principal de éstas últimas y obviamente está íntimamente relacionado con el objetivo fundamental del presente trabajo.

Nótese que en los límites de cada cuadrángulo se producen los esfuerzos tangenciales que justifican las deformaciones angulares de las distintas partículas de los fluidos reales o viscosos. Los alargamientos o acortamientos estarán obviamente relacionados con el campo de presiones.

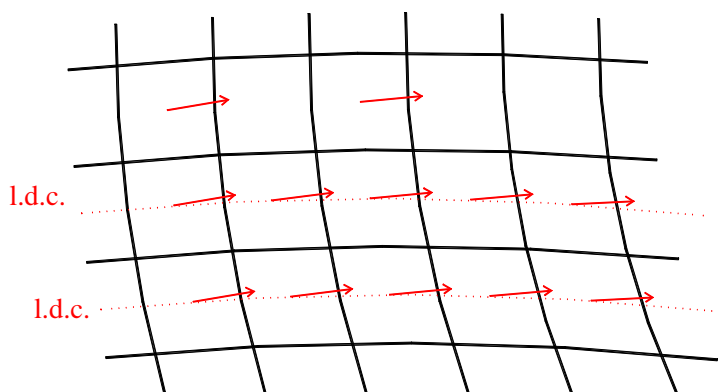
## 2.3- LÍNEAS QUE DESCRIBEN EL ESCURRIMIENTO - TUBO DE CORRIENTE

### 2.3.1- Trayectoria

Es el lugar geométrico de las sucesivas posiciones que ocupa **una única partícula** en el tiempo. Obviamente es una abstracción puesto que es imposible visualizarla en la realidad.

### 2.3.2- Línea de Corriente

Es por definición la línea envolvente de velocidades de sucesivas partículas en un instante dado. Es evidente que involucra **a infinitas partículas en un instante**, señaladas cada una por el vector velocidad de la partícula precedente. Es posible visualizarlas utilizando, por ejemplo, colorantes de igual masa específica que la del fluido en estudio.



De la imagen de Macagno para el medio continuo y de la definición de línea de corriente surge la imagen cualitativa del Ecurrimiento, destacada en la Figura 2.

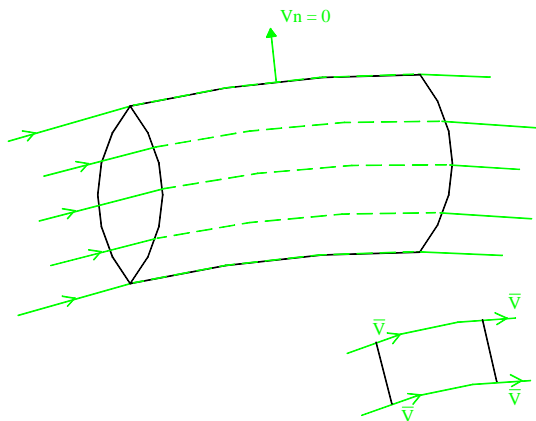
Se adelanta que también podrán considerarse aspectos cuantitativos o de cálculo, lo que constituye el objetivo de la "Red de Ecurrimiento".

**Figura 2**

Configuración de l.d.c. en un instante dado



2.3.3- Tubo de Corriente



Se lo esquematiza en la Figura 3, donde se observa que se obtiene de considerar una línea cerrada en el espacio ocupado por un campo de velocidades  $\vec{V}$ .

Es evidente que al ser el nombrado espacio ocupado por vectores velocidad en todos sus puntos, siempre existirán líneas de corriente que serán tangentes, dando lugar a un tubo cuya propiedad principal **es la de ser impermeable**, puesto que por definición de l.d.c. no pueden existir componentes de velocidad normales a las mismas.

**Figura 3**  
Tubo de corriente

**Obviamente, el tubo de flujo anterior está directamente aplicado a un campo vectorial de velocidades**, las que al estar vinculadas al transporte de masa (agua en nuestro caso), implican la "impermeabilidad" acotada. **Si el concepto fuera aplicado a un campo de vectores  $\vec{A}$ , se obtiene un concepto más general en el que se destaca la imposibilidad de que existan componentes del campo vectorial normales a las líneas que delimitan al tubo.** Es decir que en su aplicación a la Hidráulica, encuentra un sentido físico muy preciso.

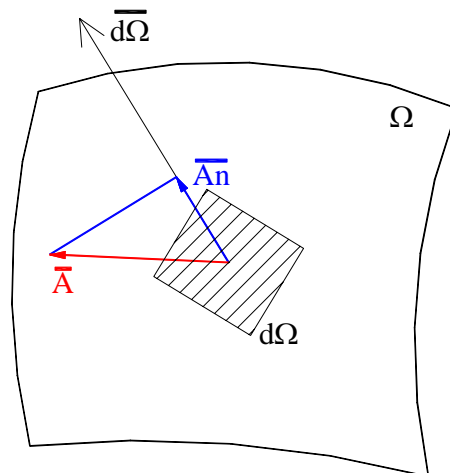
2.4- FLUJO DE UN VECTOR - CAUDAL - ESCURRIMIENTO -VELOCIDAD MEDIA

En la Figura 4 se puede apreciar el flujo elemental de un campo vectorial  $\vec{A}$ , el que se define por el producto escalar:

$$d\phi = \vec{A} \cdot d\vec{\Omega} = |\vec{A}| |d\vec{\Omega}| \cos(\vec{A}; d\vec{\Omega}) = A_n d\Omega$$

La integral, extendida a toda la superficie  $\Omega$ , resulta entonces:

$$Q = \int_{\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{\Omega} = \int_{\Omega} A_n d\Omega$$



**Figura 4**  
Flujo de un Vector

Si el campo elemental es un campo de velocidades en un medio continuo, **lo que implica transporte de masa, el flujo elemental se denomina "Caudal Elemental dq"**.

En consecuencia:

$$dQ = \bar{V} d\bar{\Omega} = V d\Omega \cos(\bar{V}; d\bar{\Omega}) = V_n d\Omega$$

y la integral resulta:

$$Q = \int_{\Omega} \bar{V} d\bar{\Omega} = \int_{\Omega} V_n d\Omega$$

Se define como velocidad media U en la superficie  $\Omega$  a la que surge de considerar:

$$Q = U\Omega = \int_{\Omega} \bar{V} d\bar{\Omega} = \int_{\Omega} V_n d\Omega$$

Cuya ecuación de dimensión es:

$$\frac{L}{T} L^2 = \frac{L^3}{T} ; \text{ es decir } \frac{m^3}{s}; \frac{1}{s}$$

Al despejar U, la velocidad media resulta:

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} V_n d\Omega = \frac{Q}{\Omega}$$

Cuya dimensión es L / T, es decir m/s.

**Al transporte de masa obligado por el campo de velocidades inherente al medio continuo en estudio, se lo denomina "Ecurrimiento".**

El gasto o caudal elemental de masa se obtiene al multiplicar el gasto elemental por la masa específica  $\rho$ . En efecto:

$$dq_m = \rho dq = \rho \bar{V} d\bar{\Omega}$$

Por lo que la integral será:

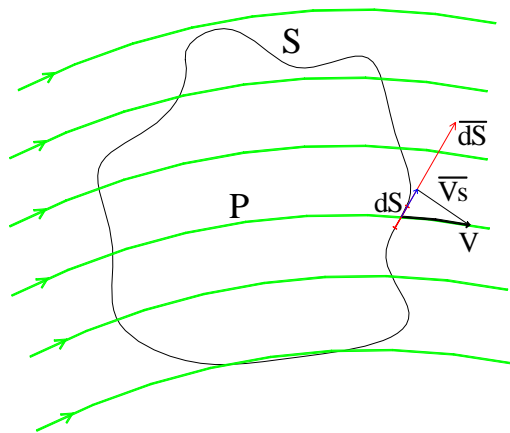
$$Q_m = \int_{\Omega} \rho dq = \rho \int_{\Omega} V_n d\Omega = \rho Q = \rho U \Omega$$

Evidentemente, su ecuación de dimensión resulta:

$$\frac{M}{L^3} \frac{L}{T} L^2 = \frac{M}{T}$$

que se mide en unidades de masa por segundo.

## 2.5- CIRCULACIÓN



**Figura 5**  
Circulación de un Vector

En el campo de velocidades representado por la configuración de l.d.c. de la Figura 5, se considera una curva cerrada S.

Se define a la circulación elemental como el producto escalar  $\bar{V} \cdot d\bar{S}$ .

Por lo tanto, la Circulación  $\Gamma$  resulta:

$$\Gamma = \oint \bar{V} \cdot d\bar{s} = \oint V \, ds \cos(\bar{V}; d\bar{s}) = \oint V_s \, ds$$

Si  $\Gamma$  es distinta de cero, existe masa que circula alrededor del punto medio P. Se obtiene así la interpretación de un "vórtice" real.

## 2.6- ROTOR

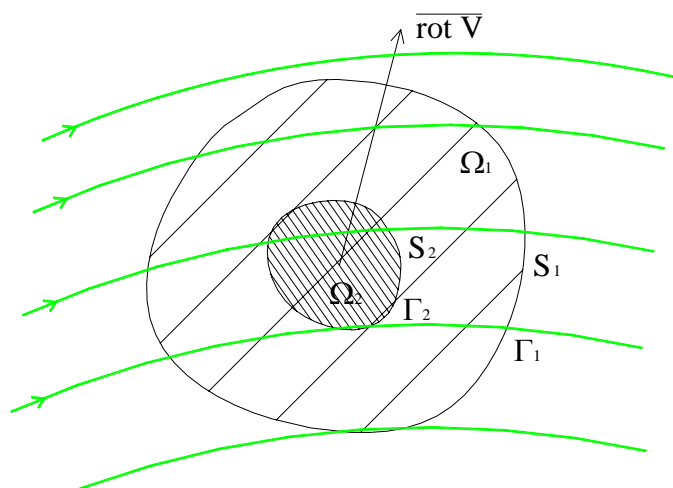
En la Figura 6 se representa un campo de velocidades caracterizado por sus líneas de corriente. Considerando una curva en un plano atravesado por las l.d.c., se define como Vector Rotor al límite de la circulación cuando la superficie encerrada por la curva en la que se produce la misma tiende a cero.

$$\text{rot } \bar{V} = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Omega} = \frac{d\Gamma}{d\Omega}$$

En la que:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Omega} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\Omega_1 - \Omega_2}$$

Y en la que, además, la superficie  $\Omega_1$  tiende a anularse, es decir tiende al punto.



**Figura 6**  
Vector Rotor

Nótese que una forma elemental, y probablemente sin demasiado rigor matemático, de obtener la expresión final del Teorema de Stokes sería la siguiente.

De la definición de vector rotor se puede despejar:

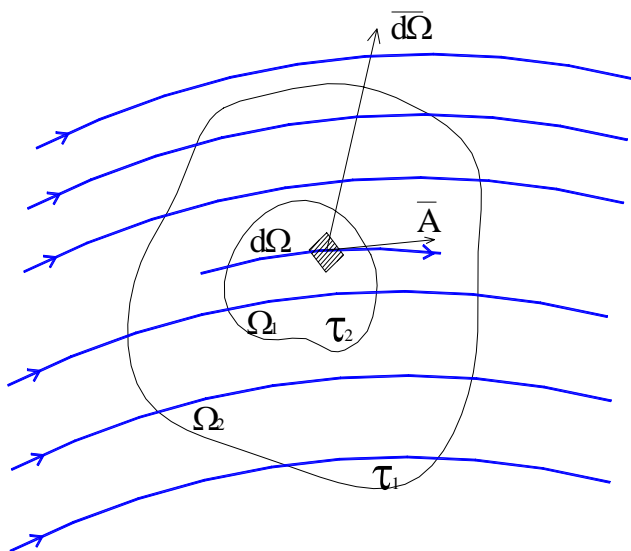
$$d\Gamma = \text{rot } \bar{V} d\Omega$$

Por lo que la integral resulta:

$$\Gamma = \oint \bar{V} ds = \int_{\Omega} \text{rot } \bar{V} d\Omega$$

La que se interpreta como que "la circulación sobre una curva cerrada inmersa en el campo vectorial, es igual a la integral del flujo del campo del rotor en la superficie que encierra".

## 2.7- DIVERGENCIA



Divergencia de un Vector

En la Figura 7 se representa nuevamente un campo de velocidades dado por una configuración de líneas de corriente.

Considerando un determinado volumen de control inmerso en el espacio ocupado por el medio continuo en movimiento (caracterizado por la configuración de líneas de corriente) el flujo elemental del vector  $\bar{A}$  en un elemento diferencial de superficie representado por su vector normal  $\bar{d}\Omega$  resulta:

$$d\phi = \bar{A} \cdot \bar{d}\Omega$$

**Figura 7**

Por lo que el flujo extendido a toda la superficie del volumen de control, resulta:

$$\Phi = \int_{\Omega} \bar{A} \cdot \bar{d}\Omega$$

Se define como la divergencia del vector  $\bar{A}$  al límite del flujo del mismo en la superficie del volumen de control, cuando el mismo tiende a anularse. En símbolos:

$$\text{div } \bar{A} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau} = \frac{d\Phi}{d\tau}$$

En la que:  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$  y  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$  y  $\tau_2$  tiende a cero.

Se recuerda que las componentes cartesianas de la divergencia de un vector están dadas por la expresión:

$$\text{div}\bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial A_x} + \frac{\partial A_y}{\partial A_y} + \frac{\partial A_z}{\partial A_z}$$

Si el campo vectorial **representa el campo de velocidades en un medio continuo, su flujo en la superficie considerada es el "caudal", el que obviamente implica transporte de masa.**

Denominando u, v, w a las componentes según los ejes x, y, z del vector  $\bar{V}$ , se tiene que la divergencia del mismo, expresada en función de sus coordenadas cartesianas, resulta:

$$\text{div}\bar{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Recordando que:  $dq = \bar{V} \cdot d\bar{\Omega}$  y consecuentemente  $Q = \int_{\Omega} \bar{V} \cdot d\bar{\Omega}$

Al considerar  $\text{div}\bar{V}$ , se tiene que:

$$\text{div}\bar{V} = \frac{dq}{d\tau}$$

Por lo tanto,  $dq = \text{div}\bar{V} d\tau$  y la integral resulta:

$$Q = \int_{\tau} \text{div}\bar{V} d\tau$$

Recordando la definición de Q, se tiene:

$$\int_{\Omega} \bar{V} \cdot d\bar{\Omega} = \int_{\tau} \text{div}\bar{V} d\tau$$

Que es la expresión del teorema de Gauss-Green, obtenida de una forma elemental, y que se interpreta como que el caudal que atraviesa la superficie del volumen de control, fijo en el espacio en el que escurre el medio continuo, resulta igual a la integral de la divergencia extendida a dicho volumen.

## 2.8- DIFERENCIAL TOTAL EXACTA

Es conveniente recordar brevemente el concepto de diferencial total exacta en coordenadas cartesianas.

Considerando una cierta función escalar  $f(x; y; z)$ , su diferencial total se expresa:

$$df(x; y; z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x; y; z) + \frac{\partial}{\partial y} f(x; y; z) + \frac{\partial}{\partial z} f(x; y; z)$$

## 2.9- VECTOR GRADIENTE

Dada una función escalar  $U=f(x; y; z)$  tal como la que se pretende representar en la Figura 8, se le asignan a cada punto del campo las siguientes propiedades:

- La dirección y sentido del más rápido crecimiento de  $U$ .
- El valor absoluto de  $U$  para un recorrido unitario.

Se define como Vector Gradiente del campo  $U$ , aquel que tiene la dirección y sentido indicado en a) y como módulo el indicado en b).

En la Figura 8 se esquematizan los conceptos, a la vez que la misma permite interpretar que la expresión cartesiana del Vector Gradiente resulta:

$$\text{grad } \bar{U} = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}$$

Por otra parte el vector desplazamiento en una dirección cualquiera es:

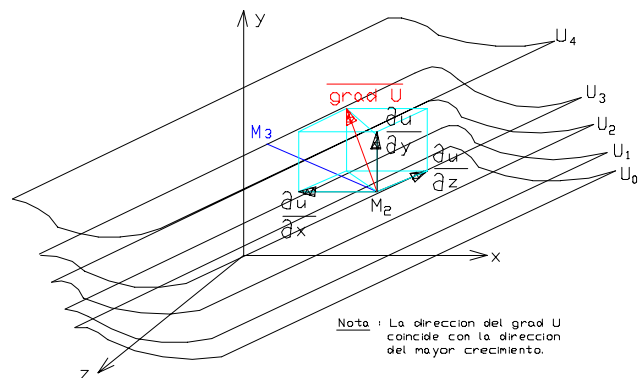
$$\bar{dl} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$$

El producto escalar de ambos vectores representa la componente según la dirección arbitraria  $\bar{l}$ , en efecto:

$$\text{gra } d\bar{U} \cdot \bar{dl} = \frac{\delta U}{\delta x} dx + \frac{\delta U}{\delta y} dy + \frac{\delta U}{\delta z} dz$$

Recordando que el segundo miembro es la diferencial total exacta  $dU$ , se tiene:

$$\text{gra } d\bar{U} \cdot \bar{dl} = dU = (\text{gra } dU) \cdot \bar{dl}$$



**Figura 8**

Esta última expresión nos brinda el valor del módulo del gradiente en una dirección cualquiera l.

Despejando dU de la misma e integrando entre dos puntos 1 y 2, se obtiene:

$$\int_2^1 \text{grad } \bar{U} \, dl = \int_2^1 dU = U_1 - U_2$$

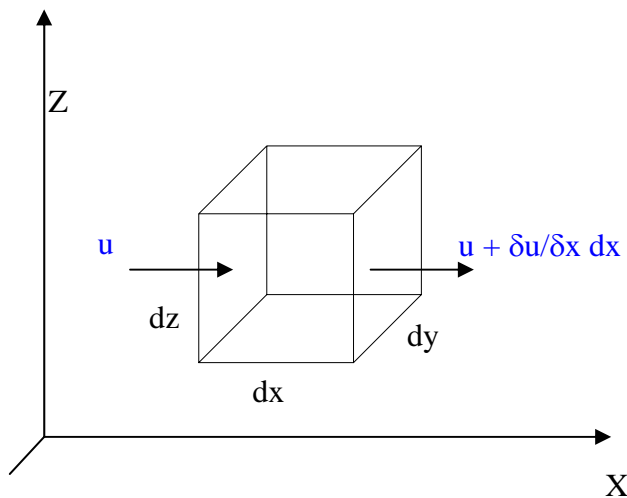
Por lo que la integral curvilínea resulta:

$$\oint \text{grad } \bar{U} \, dl = 0$$

### 3- ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Estudiaremos la ecuación de continuidad, la que se obtiene del Principio de la Conservación de la Masa aplicada al escurrimiento de fluidos.

En efecto, considerando un volumen arbitrario fijo en el espacio e inmerso en un medio continuo en movimiento que lo ocupa, es evidente que el balance entre la masa entrante y saliente del mismo en un instante dado, más la variación de la masa en su interior y en el tiempo, cuando éste tiende a cero, da inexorablemente una masa resultante nula, puesto que ésta no puede crearse ni desaparecer.



Para obtener la ecuación buscada, se impone como volumen de control el cubo de lados diferenciales  $dx, dy, dz$ , es decir el punto material (ver Figura 9).

El principio enunciado se resume simbólica y escuetamente como:

$$(m_s - m_e) + \Delta m_i = 0$$

En la expresión anterior  $m$  simboliza la masa y los subíndices indican, "saliente", "entrante" e "interior".

**Figura 9**

Obviamente el símbolo  $\Delta$  implica la "variación" de la masa. Para las tres coordenadas del espacio cartesiano desarrollaremos el paréntesis que implica el "balance total de masa en un instante dado".

La masa entrante según el eje  $x$  resulta de multiplicar el "caudal de masa" según  $x$  por  $dt$ , en efecto:

$$dq_m = \rho dq = \rho u dx dy dt = m_{ex}$$

La masa saliente resulta:

$$m_{sx} = m_{ex} + \frac{\partial}{\partial x}(m_{ex})dx$$

Es decir:

$$\rho u dx dy dt + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dx dy dt)dx$$



El balance o diferencia entre masa saliente y masa entrante resulta:

$$m_{sx} - m_{ex} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz dt) dx$$

Extrapolando el mismo procedimiento a los ejes y, z, se tiene:

$$m_{sy} - m_{ey} = \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dz dx dt) dy$$

$$m_{sz} - m_{ez} = \frac{\partial}{\partial z}(\rho w dx dy dt) dz$$

Por lo que, el balance total en un instante dado, es decir la diferencia  $(m_s - m_e)$  será:

$$m_s - m_e = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz dt) dx + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dx dz dt) dy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w dx dy dt) dz$$

Para evaluar la variación de la masa en el tiempo, se tiene que:

$$\Delta m_i = \left[ \rho dx dy dz + \frac{\partial}{\partial t}[\rho dx dy dz] dt \right] - \rho dx dy dz$$

por lo que:

$$\Delta m_i = \frac{\partial}{\partial t}(\rho dx dy dz) dt$$

Sumando ahora e igualando a 0, con el propósito de obtener la ecuación resultante del principio de la conservación de la masa aplicada al volumen elemental de lados dx, dy, dz, y eliminando además los diferenciales comunes, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La que escrita en notación vectorial resulta:

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Si se considera  $\rho = \text{cte.}$  en el espacio y el tiempo, la anterior se reduce a:

$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Que es la ecuación de continuidad para la masa específica considerada como constante, es decir que implica una "**Condición de Incompresibilidad**".

#### 4- CONDICIÓN DE IRROTACIONALIDAD

Si se impone la condición de rotor nulo, resulta:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{V} = 0$$

la que en coordenadas cartesianas resulta:

$$\omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} = 0$$

Para lo que obviamente las tres componentes de la rotación deben ser idénticamente nulas.

Para obtener las componentes cartesianas del vector rotor del campo de velocidades, recurrimos al uso del determinante simbólico que se presenta en la ecuación que sigue, cuyas propiedades fueron estudiadas en los cursos previos de Mecánica Racional.

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & \omega \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante siguiendo la regla de Zarrus se obtienen las coordenadas cartesianas buscadas del vector rotación:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \bar{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \bar{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \bar{k}$$

Al considerar nulo al vector rotor del campo de velocidades, también resulta nulo el vector rotación, para lo que deben anularse sus componentes cartesianas. Consecuentemente resultan iguales las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial x} ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

## 5- RED DE ESCURRIMIENTO

### 5.1- EQUIPOTENCIALES

Se considera un movimiento permanente o estacionario, es decir con una configuración de líneas de corriente o lo que es lo mismo, un campo de velocidades, que se mantiene idéntico en el tiempo. Además se le impone la condición de irrotacionalidad analizada precedentemente y que lleva a la igualdad de las derivadas cruzadas.

En ese caso puede plantearse la existencia de una determinada función del espacio  $\phi$ , tal que su gradiente resulte ser el vector campo de velocidades. En símbolos:

$$\bar{V} = \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \bar{k}$$

Pero como a su vez el campo de velocidades es por definición:

$$\bar{V} = u \bar{i} + v \bar{j} + \omega \bar{k}$$

Resulta que:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} ; v = \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \omega = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Reemplazando los valores de las componentes cartesianas del  $\text{grad} \phi$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Es decir que se cumple la condición:  $\bar{\omega} = 0 = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{V}$

Si además se impone ahora la condición de fluido incompresible, es decir que  $\text{div } \bar{V} = 0$ , resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi = 0$$

Es decir que la función  $\phi$  que anula su laplaciana, cumplimenta la propiedad de constituir la "Función Potencial de Velocidades", de la que deriva el campo correspondiente a un medio continuo en movimiento permanente e irrotacional de un fluido incompresible.

Se obtiene así el fundamento de un modelo matemático de gran utilidad en la determinación de los campos de velocidades denominado "Red de E scorrimiento".

Las superficies equipotenciales serán representadas por valores constantes de las funciones  $\phi(x; y; z)$ . El diferencial total exacto de la misma es:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = udx + vdy + wdz$$

En notación vectorial:

$$d\phi = \text{grad } \phi \cdot d\bar{l} = \bar{V} \cdot d\bar{l}$$

$$d\phi = |\text{grad } \phi| |d\bar{l}| \cos(\text{grad } \phi; d\bar{l}) = \bar{V} \cdot d\bar{l} \cos(\bar{V}; d\bar{l})$$

Obviamente para cada superficie equipotencial se cumple que  $d\phi=0$  por lo que  $\phi$  resulta un valor constante, de lo que se deduce que  $\cos(\bar{V}; d\bar{l})$  debe ser necesariamente nula, por lo que el ángulo entre  $\bar{V}$  y  $d\bar{l}$  es de 90 grados, es decir que el gradiente de  $\phi$ , o lo que es lo mismo el vector velocidad, es perpendicular a las superficies equipotenciales. Si se tiene en cuenta que por definición de línea de corriente, ésta es la "envolvente de los vectores velocidad", resulta evidente que las mismas resultarán ortogonales a las superficies equipotenciales.

La ecuación diferencial de las mismas resulta al ser  $d\phi$  nulo:

$$udx + vdy + wdz = 0$$

## 5.2- ESCURRIMIENTOS BIDIMENSIONALES

### 5.2.1- Conceptos Generales

Si se supone que un escurrimiento se desarrolla de manera tal que el campo de velocidades (o lo que es lo mismo la configuración de líneas de corriente) se mantiene idéntico en los planos paralelos, es decir que no existe variación del campo de velocidades según el eje perpendicular a los planos considerados, en ese caso el escurrimiento puede ser considerado "Bidimensional".

En ese caso el estudio para un plano implica el estudio para todos los planos paralelos, obteniéndose así un modelo de aplicación de gran interés práctico para el estudio de las redes de escurrimiento.

El modelo que se va configurando es un modelo matemático basado en un escurrimiento permanente o estacionario de un fluido incompresible en movimiento irrotacional y bidimensional. A pesar de todas las restricciones apuntadas, el mismo será de gran utilidad en muchas aplicaciones de la técnica y en especial para el escurrimiento en los medios permeables.

En escurrimiento bidimensional las condiciones están obviamente dadas por:

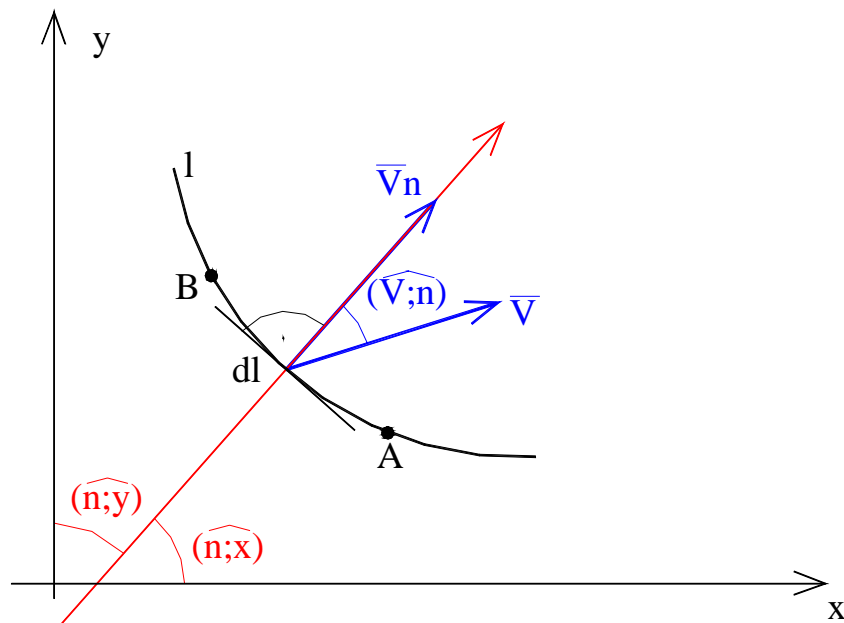
$$u=u(x; y); v=v(x; y); \omega=0$$

Es decir que  $u$  y  $v$  no dependen de  $z$  y los vectores velocidad (por ende las líneas de corriente que por definición son sus envolventes) se encuentran en un plano. Además, para los distintos planos paralelos las condiciones son idénticas para iguales pares de valores  $x$ - $y$ .

El caudal bidimensional se obtiene de reemplazar el concepto de "sección" por el de "longitud del elemento considerado", teniendo en cuenta que éste puede ser tenido en cuenta como la "superficie por unidad de profundidad o ancho".

Si se recuerda la definición de caudal (ver Figura 10), para su adaptación al "Caudal Bidimensional", se tienen las expresiones que siguen:

$$Q = \int_{\Omega} \bar{V} \, d\bar{\Omega} = \int_l \bar{V} \, dl = \int_l V \cos(\bar{V}; \bar{n}) \, dl = \int_l V_n \, dl$$



**Figura 10**  
Componentes del caudal bidimensional

En efecto, si se recuerda que el producto escalar considerado implica el producto de la componente del vector velocidad sobre la dirección normal al elemento de superficie, al cambiar ésta por elementos de arco, se obtiene la segunda parte de la expresión precedente.

### 5.2.2- Líneas Equipotenciales en Dos Dimensiones

Las ecuaciones precedentes, reducidas a dos dimensiones, es decir al plano y, x resultan:

$$\text{rot } \bar{V} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0; \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \bar{V} = u\bar{i} + v\bar{j} = \text{grad } \phi$$

En resumen, las expresiones fundamentales para las curvas equipotenciales que resultan al considerar el escurrimiento unidimensional son las siguientes:

$$\phi = \phi(x, y); \quad \bar{V} = \text{grad } \phi \quad \therefore \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}$$

Se cumple que  $\text{rot } \bar{V} = 0$ , puesto que sus componentes son:

$$\text{rot}_z \bar{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 0$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = u dx + v dy; \quad \text{si } d\phi = 0;$$

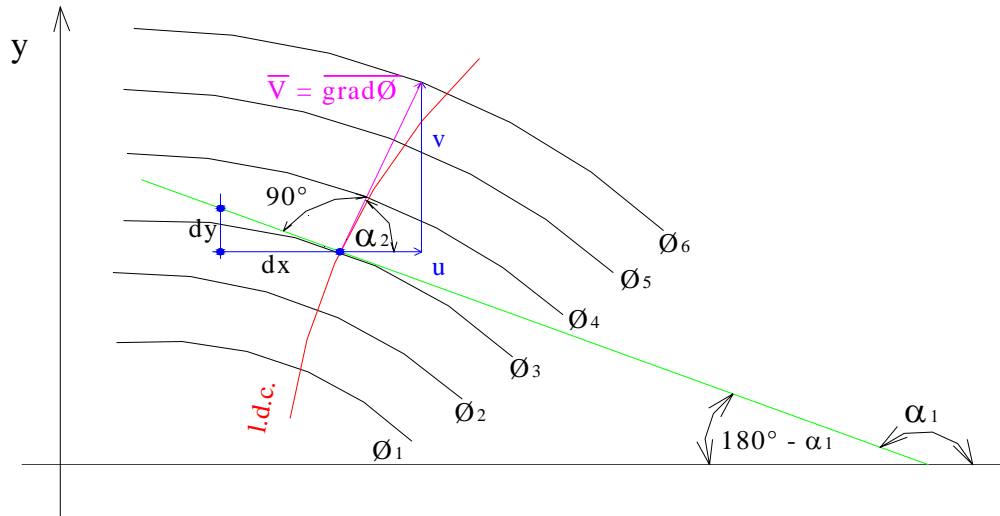
$$u dx + v dy = 0$$

La última es la ecuación diferencial de la familia de líneas equipotenciales.

Si la masa específica  $\rho$  es constante, es decir fluido incompresible, la condición que implica es:

$$\text{div } \bar{V} = 0 \therefore \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

En la Figura 11 se destaca, para el caso de un escurrimiento bidimensional, cómo las líneas de corriente, envolventes de los vectores velocidad por definición, resultan necesariamente ortogonales a las líneas equipotenciales, cumplimentando lo expuesto precedentemente.



**Figura 11**

En efecto, de la figura se desprende que, para la tangente en el punto de aplicación del vector velocidad se cumple que:

$$\text{tg } \alpha_1 = - \text{tg } (180^\circ - \alpha_1) = \frac{dy}{dx}$$

(Se recuerda de la trigonometría que  $\text{tg } (180^\circ - \alpha_1) = - \text{tg } \alpha_1$ )

De la ecuación diferencial se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{u}{v} = - \frac{1}{v/u}$$

Por otra parte, del dibujo se obtiene que:

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{v}{u}$$

Por lo que:

$$\text{tg } \alpha_1 \text{ tg } \alpha_2 = - \frac{1}{v/u} \frac{v}{u} = -1$$

Que es la condición de ortogonalidad, con lo que se prueba, al ser por definición la línea de corriente envolvente de los vectores velocidad, que éstas resultan perpendiculares a las equipotenciales.

### 5.3- LÍNEAS DE CORRIENTE (FUNCIÓN DE STOKES)

Se propone la existencia de una función  $\Psi(x, y)$ , tal que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -u$$

Con lo que:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = v dx - u dy$$

Para  $\Psi = \text{cte.}$ , resulta:

$$d\Psi = -u dy + v dx = 0$$

De la anterior surge:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \text{tg } \alpha_2$$

Por lo que, al ser  $\alpha_2$  el ángulo que forma el vector campo  $\bar{V}$  con respecto a x, la anterior representa la ecuación diferencial de las líneas de corriente. En consecuencia, cada línea de corriente queda identificada por un valor constante de la función  $\Psi$ .

Si a la función  $\Psi$  se le aplica la condición de incompresibilidad, se prueba que verifica. En efecto:

$$\text{div } \bar{V} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

Si se aplica la condición de irrotacionalidad, se tiene que:

$$\text{rot}_z \bar{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \Psi = 0$$

Se aplica la ecuación de continuidad en el recinto MNR, teniendo en cuenta que el concepto de infinitésimo nos permite considerar  $\bar{V}$  aplicado en el punto medio de dn sin mayor error (por lo tanto, aplicado en el punto R' de la Figura 12).

Además, por convención, se adoptan como positivos los caudales entrantes para una circulación dextrógira, considerando para la misma, los signos que surjan para los lados diferenciales y para las componentes de velocidad.



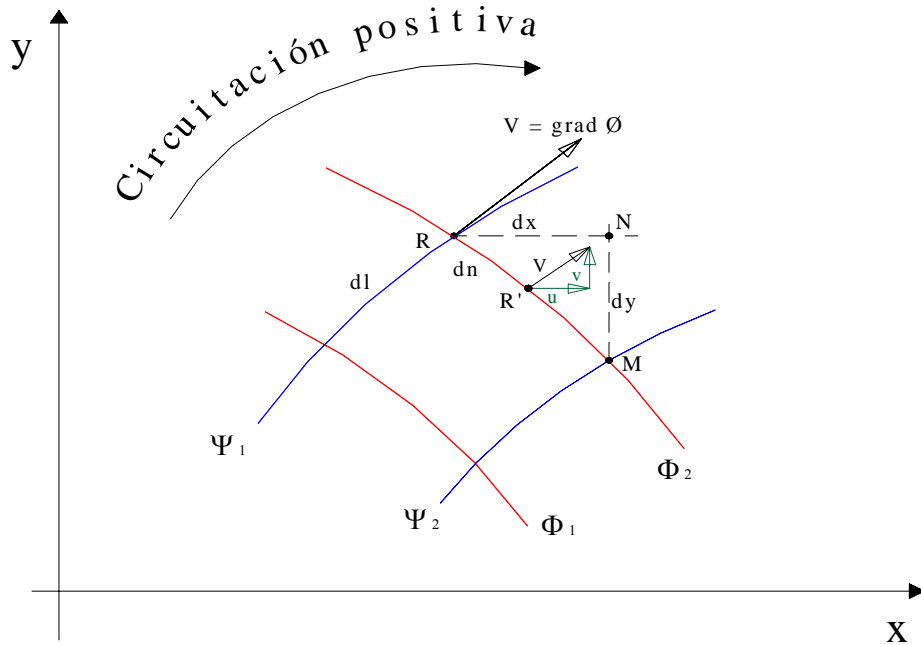


Figura 12

En nuestro caso, se tiene:

$$+V \, dn = (+v)(+dx) + (u)(-dy)$$

$$\therefore V \, dn = v \, dx - u \, dy$$

Recordando el concepto de caudal bidimensional, la expresión anterior evidentemente lo representa, por lo que:

$$v \, dx - u \, dy = V \, dn = dq$$

Como  $dn$  se desarrolla entre dos líneas de corriente y es ortogonal a las mismas,  $Vdn$  representa también  $d\Psi$ , por lo que finalmente:

$$v \, dx - u \, dy = V \, dn = dq = d\Psi$$

Recordando las funciones  $\phi$  y  $\psi$ , ambas quedan vinculadas por las definiciones:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Las expresiones anteriores implican que las familias de curvas dadas para valores constantes de  $\phi$  y  $\psi$ , se cortan ortogonalmente, lo que por otra parte fue probado en un comienzo, cuando se demostró la ortogonalidad entre las equipotenciales y los vectores velocidad, de los que la línea de corriente es por definición, su envolvente.

La condición anterior expresa también que el  $\text{grad}\phi$ , que es la velocidad  $\bar{V}$ , debe ser perpendicular al  $\text{grad}\psi$  y que sus módulos son iguales. Por otra parte también puede interpretarse que  $\text{grad}\phi$  es tangente a las líneas de corriente, mientras que  $\text{grad}\psi$ , lo es a las equipotenciales.

Considerando un eje tangente a las líneas de corriente  $l$ , y otro perpendicular  $n$ , consecuentemente tangente a las equipotenciales, se tiene que:

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = V = \frac{\partial\psi}{\partial n} \quad \text{o bien} \quad |\text{grad}\phi| = |\text{grad}\psi|$$

$$\text{y que} \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 = \frac{\partial\psi}{\partial l}$$

Cuando se representan gráficamente las líneas de corriente, se adopta entre unas y otras un incremento constante  $\Delta\psi$  de la función de corriente. Si se considera la separación entre líneas de corriente  $\Delta n$ , la velocidad media del escurrimiento entre ambas es:

$$V_m = \frac{\Delta\psi}{\Delta n}$$

Consecuentemente, la separación entre las líneas es inversamente proporcional a la velocidad media de referencia.

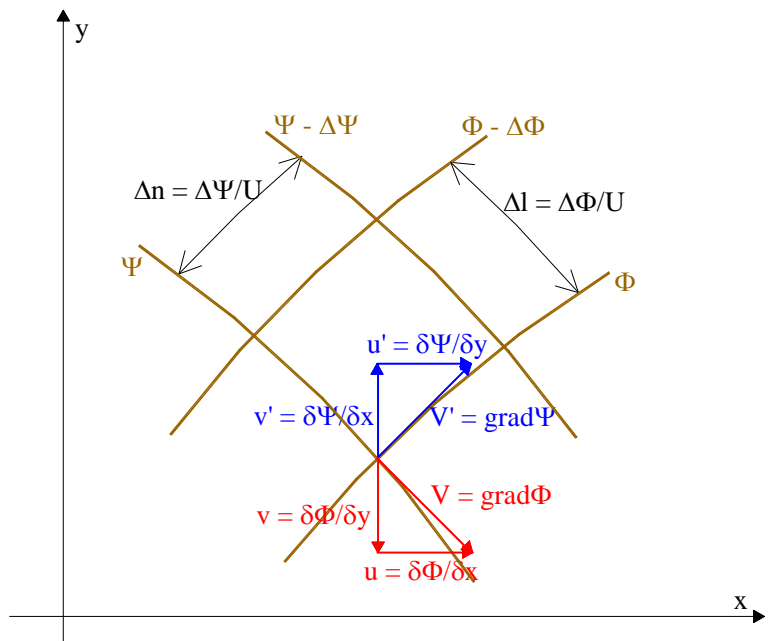


Figura 13

Las funciones  $\Phi$  y  $\Psi$ , así definidas son “armónicas conjugadas”, lo que implica que conocida una, es inmediata la determinación de la otra. Además, ambas satisfacen o constituyen funciones potenciales del vector velocidad  $\bar{V}$ , resultando un campo “conjugado” del otro.

## 6- PROPIEDADES DE LA RED DE ESCURRIMIENTO

En resumen, se tiene que los diferenciales totales exactos de las funciones  $\Phi$  y  $\psi$  cumplen con las siguientes expresiones:

$$d\phi = \text{gra } d\phi \, d\bar{l} = |\text{gra } d\phi|_1 |d\bar{l}| = V \, dl$$

$$d\psi = \text{gra } d\psi \, d\bar{n} = |\text{gra } d\psi|_n |d\bar{n}| = V \, dn$$

Pasando de los diferenciales a los incrementos finitos y dividiendo miembro a miembro, se tiene:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi} = \frac{\Delta l}{\Delta n}$$

Si se adoptan valores constantes para  $\Delta\Phi$  y  $\Delta\Psi$  su cociente también resulta constante e igual al cociente entre  $\Delta l$  y  $\Delta n$ .

Por lo que los cuadriláteros curvilíneos mantendrán la misma relación entre largo y ancho. Si además se consideran iguales  $\Delta\Phi$  y  $\Delta\Psi$  resultan iguales  $\Delta l$  y  $\Delta n$ .

De lo expuesto surge que los cuadriláteros curvilíneos son de lados iguales y tienden a ser cuadrados cuando  $\Delta\Phi$ ,  $\Delta\Psi$ ,  $\Delta l$  y  $\Delta n$  tienden a anularse, es decir para valores pequeños.

Se recuerda que:

$$\Delta\psi = V \, \Delta n$$

pero también:

$$\Delta q = V \, \Delta n$$

Al ser  $\Delta q$  el caudal bidimensional resulta que:

$$\Delta\Psi = \Delta q$$

Es decir que entre cada par de líneas de corriente pasa una parte del caudal,  $\Delta q$ . En las figuras que siguen se ilustran convenientemente todos los conceptos vertidos precedentemente.

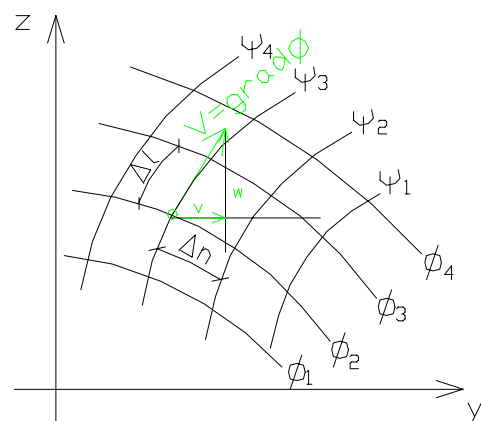
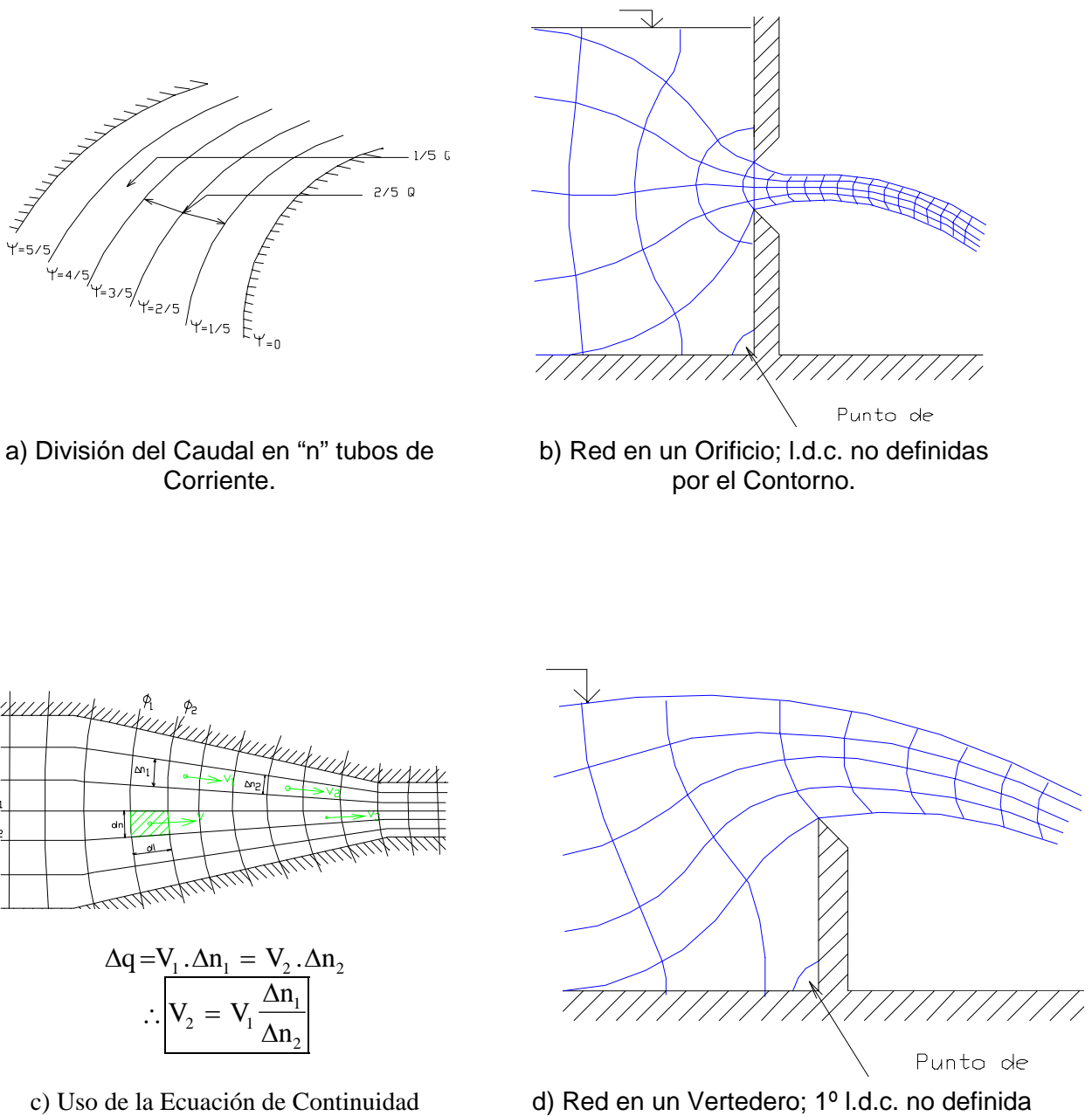


Figura 14



**Figura 15**  
Redes de Esgurrimiento

En la Figura 15a) puede observarse un escurrimiento bidimensional encauzado entre dos contornos impermeables que por ese hecho constituyen las líneas de corriente condición de frontera del problema. Es factible establecer entre ellas un número arbitrario de líneas de corriente, que cuanto mayor sea, mayor será el afinamiento con que se encara el planteo del escurrimiento. Obviamente, el número de tubos de corriente es igual a n-1, siendo n el número de líneas de corriente adoptado.

Nótese que el trazado de las líneas de corriente, tal como ya se adelantara, brinda una imagen cualitativa del escurrimiento, la que podrá transformarse en cuantitativa cuando se complete el trazado de la red con las correspondientes equipotenciales, e incluso se le puedan aplicar conclusiones de la dinámica, que más adelante se elaborarán.

En el caso de la Figura 15a) se han considerado 6 líneas de corriente y consecuentemente 5 tubos de corriente, por cada uno de los cuales pasa, obviamente 1/5 del caudal total. En el esquema se ha indicado el caudal que pasa entre dos tubos de corriente contiguos, el que evidentemente es 2/5 del total.

En la Figura 15b) se analiza el caso de un escurrimiento bidimensional entre dos contornos (líneas de corriente condición de borde o frontera) convergentes. Se consideran 7 líneas de corriente y consecuentemente 6 tubos de corriente y se ha completado el trazado con las correspondientes equipotenciales. Esta figura sirve para mostrar muy claramente el **objetivo principal de la red, que es el conocimiento del campo de velocidades en todo el escurrimiento**. Como puede observarse, del conocimiento de la velocidad media entre dos líneas de corriente (tubo de corriente), en base a la geometría de la red puede determinarse la velocidad en otro sector del mismo tubo. En efecto, por continuidad:

$$\Delta q = V_1 \Delta n_1 = V_2 \Delta n_2$$

$$\therefore V_2 = V_1 \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}$$

Evidentemente, cuando más pequeña sea la malla de cuadrángulos, más parecida será la velocidad media a la velocidad en el punto y por lo tanto más precisa la red.

En general se busca que el origen de la misma provenga de un sector de escurrimiento uniforme, en el que es fácilmente determinable la velocidad media en cada tubo de corriente y a lo largo de una equipotencial. Si, como en el caso de la figura, tiende a un sector también uniforme el trazado "cualitativo" se simplifica notablemente.

Nótese que al pasar por cada tubo de corriente una fracción del caudal total, que es la misma en todos y cada uno de ellos, **la ecuación de continuidad puede ser extrapolable a tubos de corriente distintos**. En efecto:

$$\Delta q = V_1 \Delta n_1 = V_3 \Delta n_3$$

$$\therefore V_1 = V_3 \frac{\Delta n_3}{\Delta n_1}$$

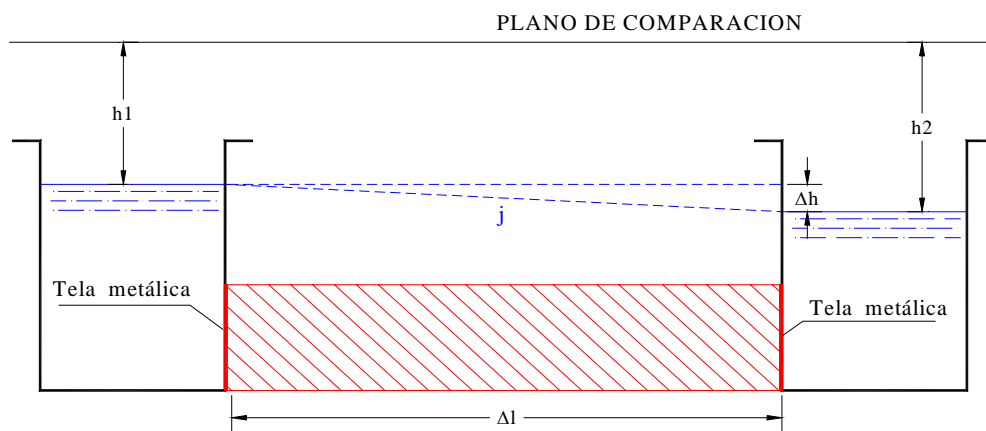
Las Figuras 15c) y d) representan redes de escurrimiento de "salida por orificio" y "vertedero", estructuras de gran aplicación en la Hidráulica Aplicada, y que tienen en común

que las líneas de corriente "condición de borde", no coinciden con fronteras fijas, inamovibles y evidentes del escurrimiento. Esta circunstancia se encuentra reiteradamente en la problemática de las redes de escurrimiento en los medios permeables. En un caso u otro la determinación de las nombradas condiciones de borde merece un tratamiento especial.

## 7- APLICACIÓN DE LA RED DE ESCURRIMIENTO A LOS MEDIOS PERMEABLES

### 7.1- LA LEY DE DARCY

En la Figura 16 se esquematiza un permeámetro, es decir un dispositivo donde se coloca una muestra del suelo a ensayar y en el que se provoca un escurrimiento de agua en su interior, el que obviamente está acotado en función de la relación de espacios vacíos de la muestra y de las diferencias de nivel provocadas por la misma. Nótese que el aparato permite evacuar los excedentes de caudal aguas arriba de la muestra.



**Figura 16**

De la experiencia esquematizada surge que la velocidad de pasaje del agua por el medio poroso resulta proporcional al "gradiente unitario de energía  $j^*$ ", definido como:

$$j = \frac{\Delta h}{\Delta l} \text{ que en el límite es } j = \frac{dh}{dl}$$

Es evidente que si el espesor de la muestra del esquema resultara variable en forma continua, el valor de  $j$  sería variable de punto a punto, puesto que la curva no sería ahora una recta. En ese caso se tiene un sentido físico más evidente del concepto de gradiente en la dirección del escurrimiento, al ser interpretado como la variación del valor  $h$  (o "carga hidráulica") con el recorrido.

La constante de proporcionalidad que convierte en una igualdad a la relación entre la velocidad y el gradiente unitario de energía se define como "Coeficiente de permeabilidad  $K$ " del suelo de la muestra, el que constituye una propiedad intrínseca del mismo. La expresión conocida como "ley de Darcy" queda:

$$V = -k \frac{dh}{dl}$$

En la que el signo negativo expresa un valor positivo de  $V$  en función de un crecimiento de la “carga  $h$ ” con el recorrido.

Extendiendo la ley a un medio tridimensional, isotrópico y homogéneo, (por lo que  $k$  resulta idéntico en todas las direcciones) se tiene:

$$\bar{V} = u\bar{i} + v\bar{j} + \omega\bar{k} \quad \text{y} \quad k = k_x = k_y = k_z$$

Por otra parte, la ley de Darcy en las direcciones de los ejes indica que:

$$u = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}; \quad v = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}; \quad \omega = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

por lo que

$$\bar{V} = -k \frac{\partial h}{\partial x} \bar{i} - k \frac{\partial h}{\partial y} \bar{j} - k \frac{\partial h}{\partial z} \bar{k} = -\text{grad } kh$$

Recordando que el fundamento de la red de escurrimiento es que:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \text{grad } \phi \\ \therefore \text{grad } \phi &= -k \cdot \text{grad } h \\ \text{de donde } \phi &= kh + \text{cte} \end{aligned}$$

Se deduce que en un medio permeable tridimensional, isotrópico y homogéneo, el producto  $kh$  es la función potencial de la que deriva el campo de velocidades convenientemente representado por la red de escurrimiento.

Nótese que esta sencilla deducción, **es el argumento que posibilita el uso de las redes de escurrimiento en los medios permeables**, las que se convierten así, en una herramienta sumamente valiosa y de importantes aplicaciones prácticas.

## 7.2- LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD Y LA LEY DE DARCY

Al reemplazar en la ecuación de continuidad el valor de las componentes de velocidad dadas por Darcy, se tiene:

$$\text{div } \bar{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = - \left( k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right)$$

para medios isotrópicos se cumple  $\nabla^2 h = 0$

Es decir que:

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

### 7.3- LA RED DE ESCURRIMIENTO EN LOS MEDIOS ANISÓTROPAS

Al enfrentarse con el hecho de que los suelos en la realidad y en la mayoría de los casos no son homogéneos ni isotrópicos, parecería que todo lo expuesto perdería validez en la práctica, dado que es posible encontrarse con medios permeables que tienen permeabilidades distintas según el sentido de los tres ejes coordenados.

En ese caso la ecuación de continuidad combinada con la de Darcy, lleva obviamente a que:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

La realidad permite trabajar en dos dimensiones por que lo común es que la permeabilidad pueda ser considerada constante en el sentido de la profundidad, por lo que en la práctica se tienen, en general, dos permeabilidades distintas según los ejes vertical y horizontal.

Afortunadamente se dispone de la "Teoría de la Sección Transformada", la que permite utilizar la red de escurrimiento bidimensional para un medio homogéneo e isotrópico, en otro que no lo es. En esencia la teoría de referencia constituye un artificio de cálculo basado en una relativamente simple transformación de coordenadas, la que modifica las dimensiones de la zona del escurrimiento en estudio, de manera tal que sobre las nuevas dimensiones halladas pueda aplicarse la red obtenida para un medio de idéntica permeabilidad según todas las direcciones.

Si se supone un dominio en el campo bidimensional x-y, caracterizado por un medio permeable en que  $k_x$  es distinta de  $k_y$  y se propone el cambio de coordenadas que sigue:

$$y' = \left( \frac{k_x}{k_y} \right)^{0.5} y$$

Reemplazando en la expresión de la laplaciana de h nula, aplicada a escurrimiento bidimensional y dividiendo por  $k_y$ , se obtiene:

$$\frac{k_x}{k_y} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y'^2} = 0$$

Por otra parte, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial y'} \frac{dy'}{dy} = \left( \frac{k_x}{k_y} \right)^{0.5} \frac{\partial h}{\partial y'} \frac{dy}{dy} \\ \therefore \frac{\partial h}{\partial y} &= \left( \frac{k_x}{k_y} \right)^{0.5} \frac{\partial h}{\partial y'} \end{aligned}$$



En consecuencia, derivando nuevamente se obtiene:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y'^2} = \frac{k_x}{k_y} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

Reemplazando en la primera:

$$\frac{k_x}{k_y} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{k_x}{k_y} \frac{\partial^2 h}{\partial y'^2} = 0$$

$$\therefore \nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

Evidentemente, este resultado indica que la ecuación obtenida para el medio isótropo es válida para el medio anisótropo, siempre que la escala vertical del dibujo sea transformada según la expresión previa, que posibilita reemplazar y por y'.

Por otra parte, se recuerda que el caudal elemental cumple con:

$$dq = d\psi = v dx - u dy$$

Si se reemplazan por las componentes de la velocidad en función de la ecuación de Darcy, se tiene:

$$dq = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} dy - k_y \frac{\partial h}{\partial y} dx$$

si  $k_x = k_y = k$ , y se multiplica por  $-1$

$$dq = k \left( \frac{\partial h}{\partial x} dy + \frac{\partial h}{\partial y} dx \right)$$

Si se considera ahora la transformación apuntada, es decir dy' en función de dy, se tiene que:

$$dy' = \left( \frac{k_x}{k_y} \right)^{0,5} dy \quad \therefore \quad dy = \left( \frac{k_y}{k_x} \right)^{0,5} dy'$$

Por lo tanto:

$$dq = k_x \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{k_y}{k_x} \right)^{0,5} dy' + k_y \frac{\partial h}{\partial y'} \left( \frac{k_x}{k_y} \right)^{0,5} dx$$

Operando se llega fácilmente a que:

$$dq = \sqrt{k_x k_y} \left( \frac{\partial h}{\partial x} dy' + \frac{\partial h}{\partial y'} dx \right)$$

La anterior permite calcular caudales, teniendo en cuenta la figura representada por las coordenadas verticales  $y'$  en lugar de las originales  $y$ , considerando ahora una permeabilidad que es la raíz cuadrada del producto de las permeabilidades  $k_x$  y  $k_y$  (el valor medio geométrico de las permeabilidades según los ejes). Es decir que debe tomarse:

$$k = \sqrt{k_x k_y}$$

## 8- BREVE REFERENCIA A LAS METODOLOGÍAS DE TRAZADO DE LA RED

Nos referiremos a continuación a los métodos más usuales para el trazado de la red de escurrimiento, que son:

- a) El método gráfico
- b) El método analógico
- c) El método de los "Potenciales Simples"
- d) El método de integración numérica

### 8-1- MÉTODO GRÁFICO

También conocido como de "lápiz y goma", es el que desarrollaremos con relativa amplitud puesto que implica un conocimiento profundo e intuitivo de la red.

Consiste en la construcción de una red mediante aproximaciones sucesivas de cuadrados y partiendo de las condiciones de borde del problema, las que generalmente coinciden con bordes sólidos e impermeables del escurrimiento. De hecho constituyen las líneas de corriente límites.

A pesar de las inseguridades y errores debidos al factor personal, usualmente se obtienen modelos con sorprendente concordancia entre distintos operadores, e incluso con los desarrollados con metodologías "exactas".

Los pasos recomendados a seguir son los siguientes:

- a) Decisión del número  $n$  de líneas de corriente (implica  $n-1$  tubos de flujo) en función de la precisión deseada.
- b) Posteriormente pueden agregarse líneas en las zonas en que se desea conocer con más detalle el escurrimiento en estudio.
- c) Las líneas de corriente empiezan a dibujarse en zonas donde la distribución de velocidades es evidente. Si se parte y/o llega a zonas de escurrimiento uniforme tanto mejor. Las zonas de escurrimiento puramente radial también son de fácil trazado. Conviene comenzar el mismo en zonas alejadas de los cambios de alineación de los bordes.
- d) Se esbozan las otras partes del trazado con curvas suaves de unión con las trazadas en las partes simples originales.
- e) La separación entre líneas de corriente debe decrecer cuando disminuye el radio de curvatura.

- f) Se dibujan las equipotenciales teniendo en cuenta que deben ser en todo momento perpendicular a las líneas de corriente y deben tender a formar con ellas una malla de cuadrados. Esto implica ajustar las líneas de corriente ya trazadas y a su vez las equipotenciales, llegando finalmente y por aproximaciones sucesivas al trazado definitivo.
- g) Como regla de verificación se indica que las diagonales de los cuadrángulos deben resultar también perpendiculares entre sí.
- h) En los denominados puntos de estancamiento o de velocidad nula, dada la imposibilidad de separar infinitamente las líneas de corriente, pueden obtenerse figuras de cinco lados, en lugar de cuadriláteros. En estas regiones con puntos de estancamiento, es siempre recomendable comenzar con el trazado de las equipotenciales.
- i) Deberá ser tenida en cuenta la ecuación de continuidad, pues en los estrechamientos, al reducirse los tubos de corriente, las velocidades necesariamente aumentan en forma proporcional. Justamente la situación inversa se da en el caso de separaciones. El tamaño de los cuadrángulos está consecuentemente condicionado a la ecuación de referencia al tener que considerarse que  $\Delta n$  debe ser igual a  $\Delta l$ .
- j) Se reitera que la relación entre el ancho y el largo de todos los cuadrángulos que componen la red debe ser la misma, es decir que todos ellos deben ser semejantes.
- k) En general es suficiente trazar la red con cinco tubos de flujo. El uso de más dificulta el trazado y desvía la atención de los aspectos fundamentales.

## 8-2- MÉTODOS ANALÓGICOS

La complejidad matemática de la inmensa mayoría de los problemas a abordar, lleva a considerarlos en relación con otros de solución sencilla, aunque de naturaleza física distinta, pero de similar formulación matemática.

Como la solución matemática de ambos problemas físicos es idéntica, la misma sirve indistintamente para encarar la solución de uno u otro.

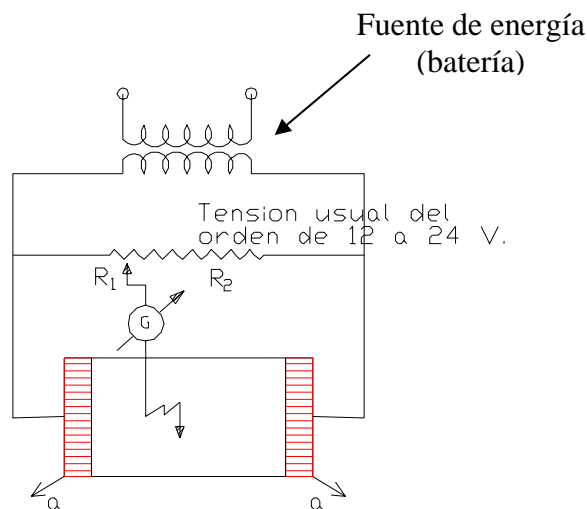
Un razonamiento como el precedente se conoce como "Analogía" y los fenómenos resultan entonces "análogos" a pesar de ser físicamente distintos. El dispositivo que permite la solución se denomina "Modelo Analógico". La característica común de los mismos es que las magnitudes que se determinan son siempre físicas, por lo que la precisión de los resultados está limitada por:

- a) La validez de la analogía planteada
- b) La precisión de las magnitudes físicas sobre el modelo analógico.

En particular interesa a nuestros propósitos, el análisis de los problemas análogos relacionados con los denominados campos solenoidales, es decir aquellos regidos por la condición que su función potencial anule su laplaciana. Incluso se acota el estudio al plano, es decir a dos dimensiones.

El más interesante modelo analógico para la resolución de redes de escurrimiento es el de la analogía eléctrica, el que se basa en la igualdad de planteo matemático entre un escurrimiento permanente, bidimensional e irrotacional de un fluido incompresible (tal como el estudiado hasta el presente) y la circulación de corriente eléctrica en un conductor homogéneo también bidimensional. Lo atractivo de este modelo es la relativa facilidad con que se pueden determinar líneas equipotenciales en un campo eléctrico, por medio del instrumental adecuado.

Al establecer la igualdad entre los potenciales eléctricos e hidráulicos, se corresponderán también las líneas de corriente homólogas. Las líneas de corriente que se obtengan se corresponderán con las equipotenciales hidráulicas, es el caso de la "Analogía Directa". Pero también pueden hacerse corresponder potenciales eléctricos con líneas de corriente hidráulicas y consecuentemente equipotenciales hidráulicas con líneas de corriente eléctricas, lo que da lugar a la "Analogía Conjugada".



**Figura 17**

En el esquema de la Figura 17 se ilustran los conceptos vertidos. Se representa un conductor homogéneo (rectangular y de pequeño espesor) vinculado a dos electrodos **a** muy gruesos de modo que pueda considerarse nula la caída de tensión a lo largo de los mismos. Si se aplica entre ellos una tensión dada, se establecerá un campo eléctrico de características bidimensionales, regido por la misma ley, que la del campo hidráulico buscado.

Por medio del dispositivo de la figura, pueden ser encontradas las equipotenciales eléctricas explorando en el conductor, hasta conseguir que el galvanómetro no indique el pasaje de corriente, al no existir caída de tensión. En ese caso, la punta exploradora se encuentra en un punto cuyo potencial está con respecto al de los electrodos **a**, en la misma relación que la resistencia parcial **R<sub>1</sub>** está con respecto a la total **R**.

Si por ejemplo se divide a la resistencia total en 10 partes, es factible obtener 9 equipotenciales intermedias entre los electrodos.

En la práctica el conductor homogéneo debe tener la forma del modelo hidráulico a estudiar. Puede ser sólido o líquido. En el primer caso tenemos: el papel conductor, el yeso húmedo y los plásticos con grafito adicionado para darle propiedades conductoras de la electricidad. En el caso de conductor líquido, el agua salinificada en una cuba con las formas adecuadas al modelo en estudio, es el que se usa casi exclusivamente. En este caso se materializan los electrodos de cobre lo suficientemente anchos como para que no se tengan caídas de potencial eléctrico significativas.

En la Figura 18a) y b) se esquematizan las instalaciones para la determinación de las equipotenciales en una forma como la representada. En un caso se tiene la analogía directa y en el otro la conjugada. Nótese que al realizar ambas se obtiene la red de corriente eléctrica completa, y que por tener idéntica solución matemática que la del problema hidráulico, también es la red de escurrimiento completa.

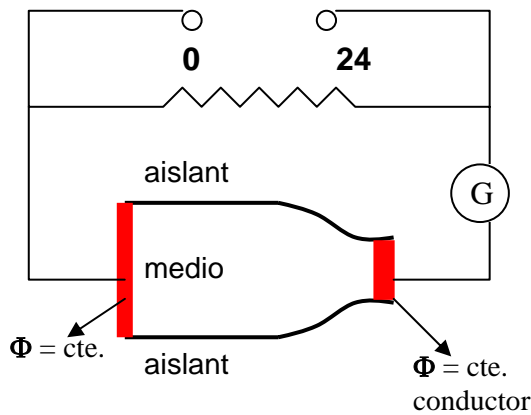


Figura 18.a

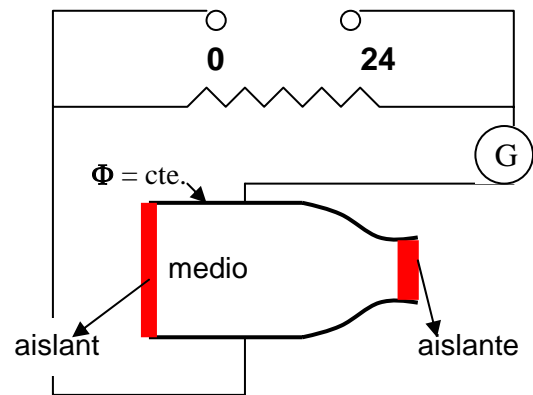


Figura 18.b

### 8.3- MÉTODO DE LOS POTENCIALES SIMPLES

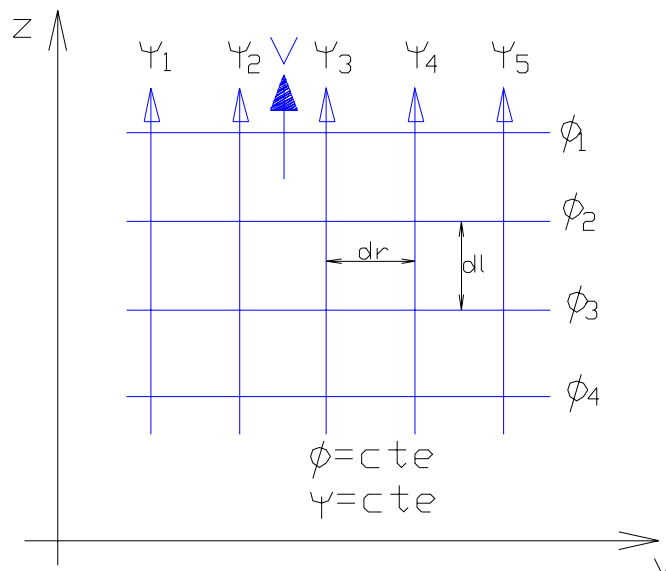
Del mismo se hará una descripción muy breve puesto que es un tema que se presta notablemente a los desarrollos matemáticos laboriosos, y no es una metodología de aplicación práctica en los medios permeables, objetivo central del presente trabajo.

Es de destacar que en los métodos precedentes no se han calculado expresamente las funciones  $\phi$  y  $\psi$  (potenciales de las equipotenciales y líneas de corriente, respectivamente) cálculo sumamente complejo y las más de las veces imposible de realizar. Justamente la ventaja de ambos métodos es la de obviar la nombrada dificultad.

El método que nos ocupa, en esencia calcula los valores de ambas funciones, pero para los escurrimientos simples, tales como: Uniforme, Fuente, Sumidero y Torbellino Potencial (ver Figura 19), los que al componerse dan lugar a nuevos modelos, como: "Escorrimento de fuente a sumidero", "Vórtice combinado de Rankine", etc.

El concepto fundamental es que la suma algebraica de escurrimientos potenciales, o más propiamente de las funciones  $\phi$  y  $\psi$ , resulta también una función potencial. Por lo tanto pueden ser obtenidos modelos similares a los de la práctica, adoptando la composición de los escurrimientos potenciales simples.

Esta metodología ha encontrado aplicación en los diseños teóricos de perfiles alares, pilas de puentes y numerosas aplicaciones relacionadas con las formas convenientes para las estructuras sometidas al escurrimiento de fluidos.



(a)  
ESCURRIMIENTO UNIFORME

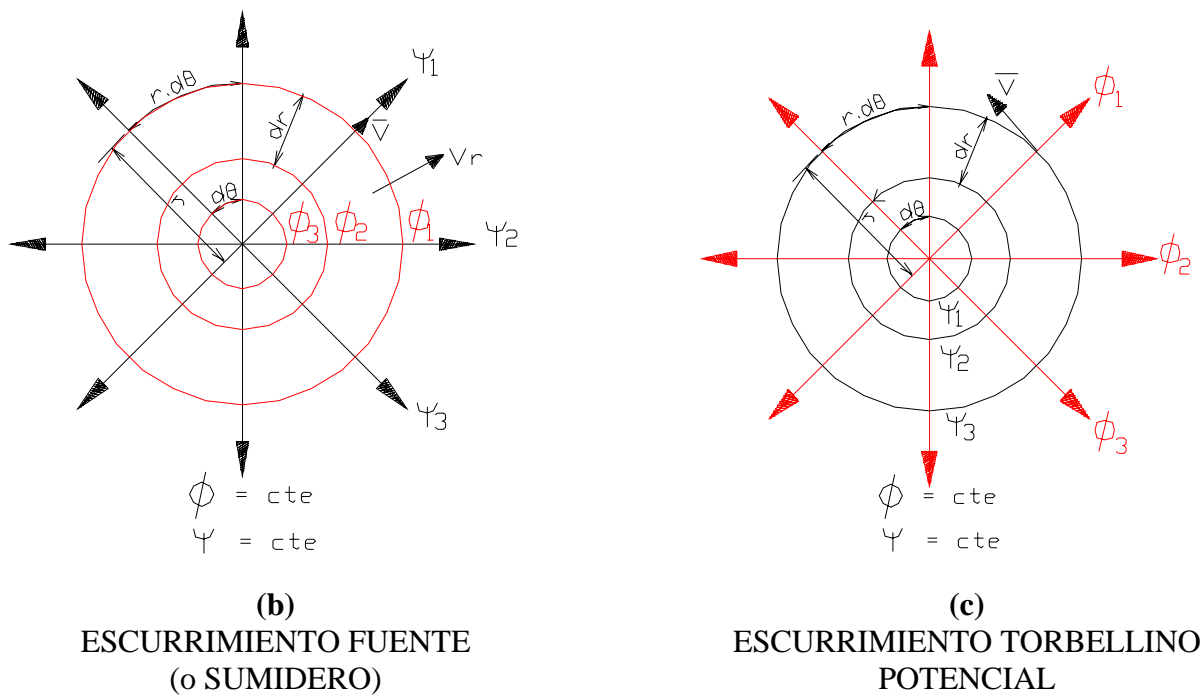


Figura 19

En la Figura 20, y solo a título informativo, se muestra cómo la composición del escurrimiento a través de un cilindro (se obtiene como suma de dos modelos de escurrimiento básicos) sumado a un "torbellino potencial", da lugar a la red resultante, en las que se concentran las líneas de corriente en la parte superior, y se separan en la inferior. Ello implica mayores velocidades por encima que por debajo y consecuentemente menores presiones encima por debajo. Esto no solo permite demostrar y calcular la existencia de una fuerza de sustentación, sino que además es el fundamento de una metodología de diseño de formas fluidodinámicas con herramientas puramente teóricas y a pesar de ello, sumamente precisas.

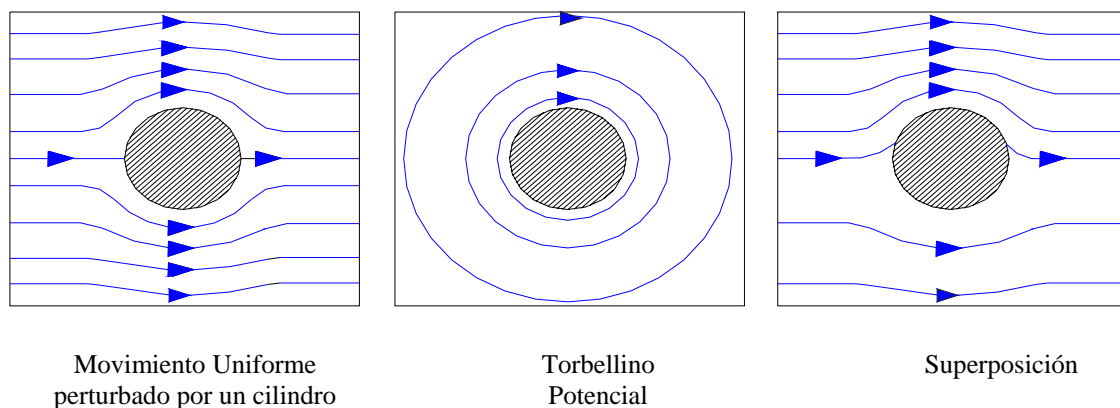


Figura 20

Composición de Movimientos Potenciales Simples



#### **8.4- REFERENCIA AL MÉTODO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA**

Es el utilizado en todos los programas utilitarios y se fundamenta en el "Método de Relajación", ampliamente tratado en la bibliografía especializada.

Se trata de la resolución de la ecuación de Laplace, por ecuaciones en diferencias finitas y constituye un método de "integración numérica".

Permite obtener cualquier grado deseado de aproximación y los fundamentos del mismo, por ser del resorte del cálculo numérico y no corresponder entonces a los objetivos de la parte central del presente trabajo no se desarrollan en el mismo.

## 9- CÁLCULOS ENERGÉTICOS CON LA RED DE ESCURRIMIENTO

### 9.1- BREVE REFERENCIA CONCEPTUAL A LA ECUACIÓN GENERAL DE NAVIER-STOKES

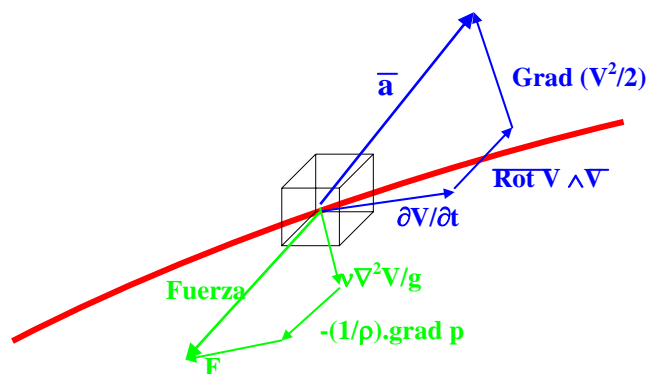
Si se considera la ecuación general del movimiento de los fluidos de Navier y Stokes, se recuerda que el equilibrio dinámico de una partícula fluida en su movimiento más general a lo largo de la trayectoria, y condicionada por el medio continuo de la que forma parte, está dado por:

$$\bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - v \nabla^2 \bar{V} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{rot } \bar{V} \wedge \bar{V} + \text{grad } \frac{V^2}{2}$$

En la que  $\bar{F}$  es la "Fuerza por unidad de masa" y el segundo miembro de la igualdad es el vector aceleración expresado en función de la impermanencia en el tiempo, la rotacionalidad del movimiento y la variación del vector velocidad en el espacio recorrido, es decir la "Convección" del movimiento.

La anterior es una compleja ecuación diferencial que analiza, a nivel microscópico, el movimiento de la partícula fluida. Evidentemente éste está íntimamente relacionado con la interacción entre las partículas contiguas del medio continuo que integran.

La Figura 21 permite la interpretación física del equilibrio dinámico de referencia.



**Figura 21**

Equilibrio Dinámico de la Partícula Fluida Real

Si se considera movimiento permanente, es decir estacionario y además irrotacional, la anterior se simplifica quedando:

$$\bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + v \nabla^2 \bar{V} = \text{grad } \frac{V^2}{2}$$

La que tiene como coordenadas cartesianas las expresiones:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \nabla^2 u &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \nabla^2 v &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{2} \right) \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \nabla^2 w &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{V^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Las que dimensionalmente son "Fuerzas por unidad de masa", F/M.

Si se tiene en cuenta que en el campo gravífico terrestre  $X=Y=0$  y además  $Z=-g$ , y que por otra parte el producto escalar del gradiente por el vector desplazamiento da como resultado la diferencial total exacta de la función involucrada, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{grad } p \cdot d\bar{l} &= dp \\ \text{grad} \left( \frac{V^2}{2} \right) \cdot d\bar{l} &= d \left( \frac{V^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Por lo que, efectuando, los reemplazos se obtiene la expresión diferencial:

$$-gdz - \frac{dp}{\rho} + v \nabla^2 \bar{V} = d \left( \frac{V^2}{2} \right)$$

La dimensión es, evidentemente, "Fuerza por unidad de masa", F/M.

Si se divide por  $g$ , se multiplica por  $-1$  y se agrupa convenientemente, se obtiene:

$$dz + \frac{dp}{\gamma} + d \left( \frac{V^2}{2} \right) - \frac{v \nabla^2 \bar{V}}{g} dl = 0$$

Luego de los procesos deductivos que llevaron a la expresión anterior, la dimensión de la misma resulta ahora "trabajo o energía por unidad de peso que escurre", es decir FL/G, la que dado que F y G son fuerzas queda consecuentemente medida en dimensiones lineales (metros).

Es de destacar, que al mismo resultado se llega elaborando las expresiones a partir de las componentes cartesianas. En efecto, al ser  $d\bar{l} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$ , el producto escalar con las componentes cartesianas de las ecuaciones de Navier-Stokes lleva a las expresiones que siguen:

$$0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx + v \nabla^2 u dx = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) dx$$

$$0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy + v \nabla^2 v dy = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V^2}{2} \right) dy$$

$$-g dz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz + v \nabla^2 \omega dz = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{V^2}{2} \right) dz$$

Sumando y recordando los conceptos de grad p y grad  $\left( \frac{V^2}{2} \right)$  y que el producto escalar tiene lugar como producto de las componentes sobre el mismo eje, resulta nuevamente la expresión:

$$-g dz - \frac{dp}{\rho} + v \nabla^2 V dl = d \left( \frac{V^2}{2} \right)$$

Dividiendo por g, multiplicando por -1 y ordenando, queda:

$$dz + \frac{dp}{\gamma} + d \left( \frac{V^2}{2} \right) - \frac{v \nabla^2 V}{g} dl = 0$$

Integrando indefinidamente la anterior a lo largo de la línea de corriente (se recuerda que en régimen permanente se confunde con la trayectoria), se tiene:

$$Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} - \int_1 \frac{v \nabla^2 V}{g} dl = \text{cte}$$

## 9.2- INTEGRACIÓN PARA EL CASO DEL ESCURRIMIENTO EN LOS MEDIOS PERMEABLES

Como la integral indicada resulta imposible de ser calculada por métodos analíticos o numéricos, su valor se obtiene experimentalmente.

Para el caso que nos ocupa, que es el del escurrimiento en los medios permeables, esas experiencias son las reseñadas brevemente en el ítem 7, que llevan a la expresión de Darcy.

Dado que el término de la integral con su signo negativo implica una "pérdida de energía hidráulica del escurrimiento" frente al resto de los términos positivos, indudablemente ese término representa la diferencia de niveles  $\Delta h$ , consecuentemente puede escribirse que:

$$\Delta h = - \int_1 \frac{v \nabla^2 V}{g} dl = -k \frac{dh}{dl}$$

Por lo que, reemplazando en la anterior, se obtiene la expresión de Bernoulli para una línea de corriente en un medio permeable, es decir que:

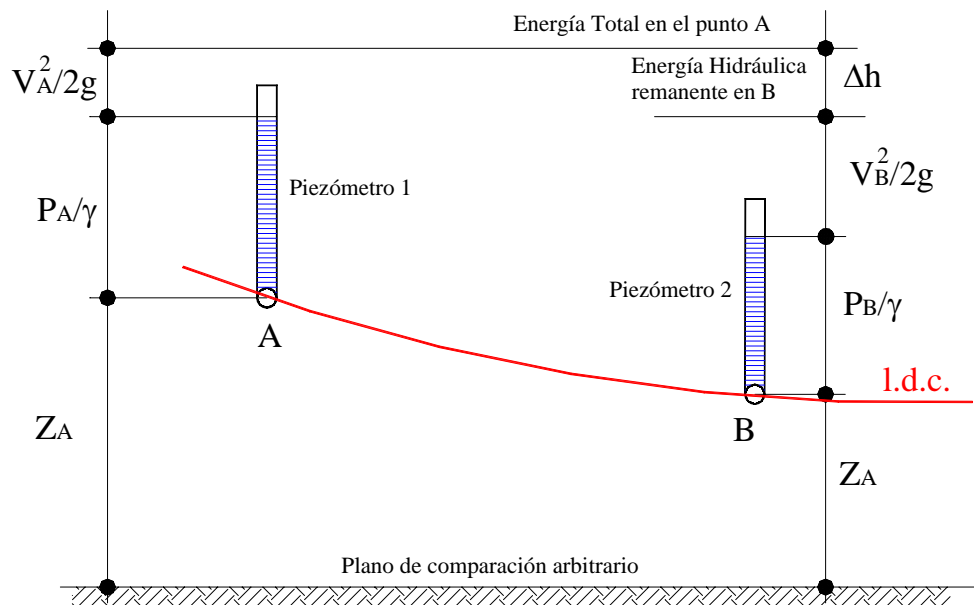
$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + \Delta h = \text{cte}$$

La ecuación aplicada a los puntos A y B de la línea de corriente (o trayectoria ya que ambos conceptos coinciden en el régimen permanente o estacionario) nos lleva a:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta h = \text{cte}$$

La expresión previa, que en realidad es una forma de expresar el principio de la conservación de la energía para el escurrimiento permanente de un líquido incompresible y en un medio permeable y a lo largo de una línea de corriente, puede ser interpretada físicamente tal como se ilustra en la Figura 22.

En la misma puede apreciarse que los términos de la ecuación de Bernoulli pueden ser representados por segmentos referidos a un plano totalmente arbitrario, representativos de las energías de posición ( $z_i$ ), de presión  $\frac{p_i}{\gamma}$ , de energía cinética  $\left(\frac{V_i^2}{2g}\right)$  y de “energía hidráulica perdida” ( $\Delta h$ ), los que obviamente sumados son iguales en ambos puntos, indicando así que la energía total es la misma, pese a la variación de las energías componentes).



**Figura 22**  
Interpretación Física de la Ecuación de Bernoulli.

Es importante destacar que la parte de la energía indicada como  $\Delta h$ , se ha "perdido" como energía hidráulica, es decir que se ha disipado como tal al vencer la resistencia que opone el coeficiente de permeabilidad del suelo.

Por otra parte las velocidades son muy pequeñas y consecuentemente, sus cuadrados despreciables. Por lo que los términos de energía cinética no tienen sentido práctico, con lo que la expresión de uso se resume en la que sigue:

$$Z_A + \frac{p_A}{\gamma} = Z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \Delta h$$

Denominando con la letra h a la "altura piezométrica:  $z + p/\gamma$ ", se obtiene finalmente la expresión de uso práctico:

$$h_A = h_B + \Delta h$$

### 9.3- INTERPRETACIÓN Y CONSECUENCIAS PRÁCTICAS DE LOS ANÁLISIS PRECEDENTES

#### 9.3.1- Aplicaciones de Bernoulli en la Línea de Corriente

Como  $\Delta h$  está dado por la expresión experimental de Darcy y según se ha probado, al multiplicarlo por el coeficiente de permeabilidad k, el valor resultante es el "potencial de velocidades" de la red de escurrimiento, estos conceptos aplicados en las figuras que siguen permiten precisar reglas prácticas y sumamente útiles para el uso e interpretación de las redes de referencia.

En la Figura 23 se aprecia un elemento de un medio permeable entre el que se ha establecido un escurrimiento regido por la ley de Darcy, que en función de la permeabilidad k, da lugar a una diferencia de nivel como la indicada. Incluso se considera la red de escurrimiento en el referido medio poroso.

Se puede apreciar lo siguiente:

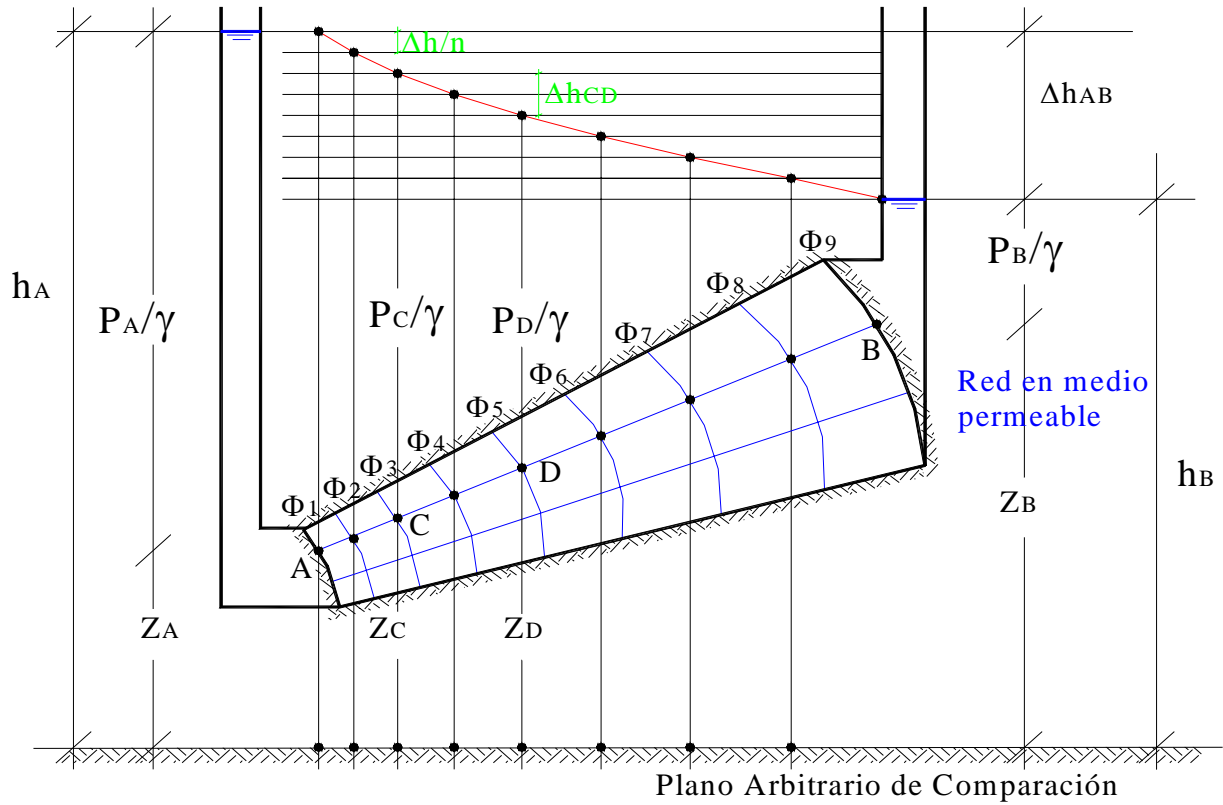
a) Entre los puntos A y B de la línea de corriente elegida, se cumple que:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \Delta h_{AB}$$

o lo que es lo mismo:

$$h_A = h_B + \Delta h_{AB}$$

- b) Al dividir  $\Delta h$  por el número de equipotenciales  $n$  adoptado, cada horizontal por  $\Delta h/n$  representa el nivel del agua correspondiente a la respectiva piezométrica.



**Figura 23**  
Interpretación de la Ecuación de Bernoulli

- c) En consecuencia entre puntos C y D, de la misma línea de corriente, se puede escribir:

$$z_C + \frac{p_C}{\gamma} = z_D + \frac{p_D}{\gamma} + \Delta h_{CD}$$

Es decir que

$$h_C = h_D + \Delta h_{CD}$$

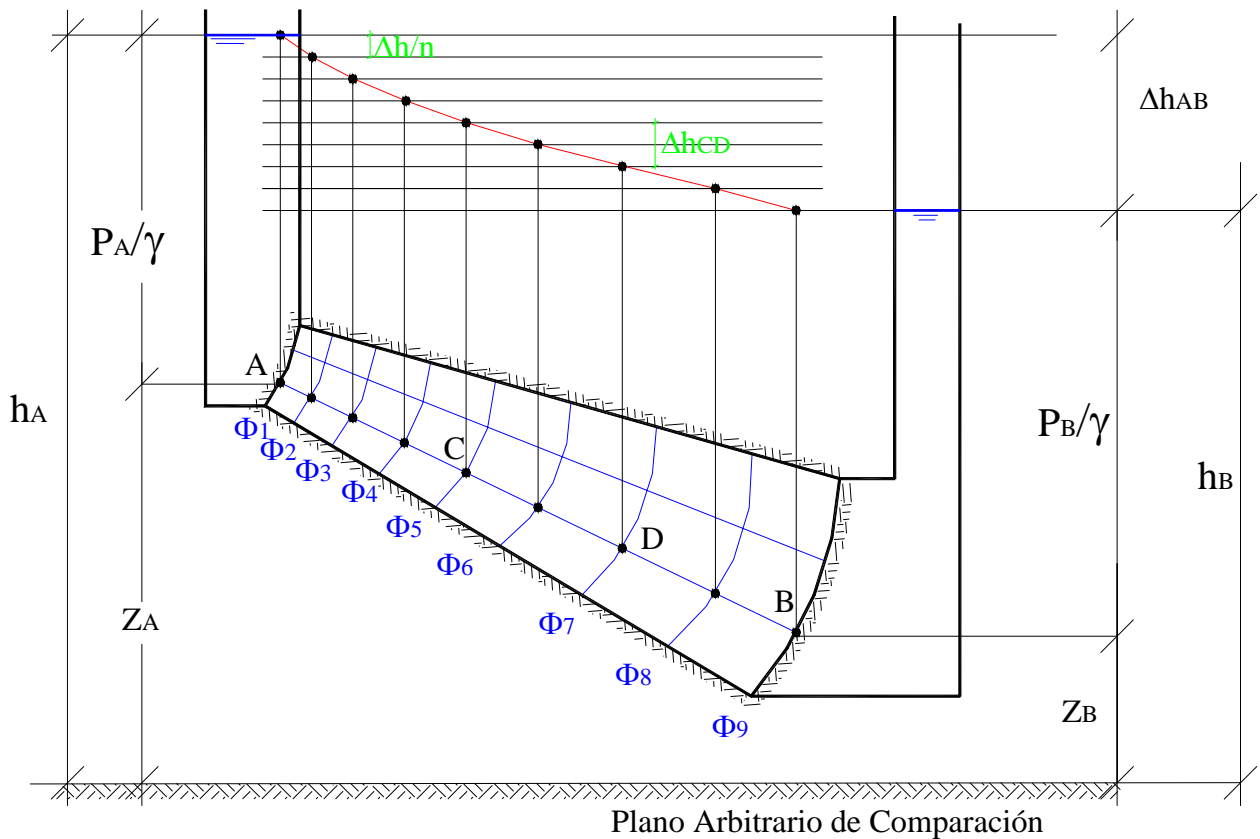
- d) La altura piezométrica  $h_A$  es mayor que la correspondiente en B, es decir  $h_B$ . Por esta razón el líquido escurre de izquierda a derecha, en el sentido de la variación negativa de  $h$  (-grad  $h$ ). Se ha considerado un espesor del medio variable, expresamente para que se aprecie el significado físico del gradiente al no resultar recta la variación de  $h$  con el recorrido (que sería la condición resultante para el espesor del manto constante o sin variación del mismo).
- e) En el caso presente es  $p_A > p_B$  pero no es esa la razón del sentido del escurrimiento, puesto que la anterior lo es. En efecto es la energía total la que fija el sentido y no solo, la parte de ella, que implica el término de energía de presión.

f) El agua asciende por el medio permeable siempre por ser la condición de "altura piezométrica" en A, mayor que la correspondiente a B.

En la Figura 24 se analiza el caso en el que el medio permeable tiene sentido descendente.

Se ha planteado así expresamente, para que quede en evidencia una mayor presión en B que en A.

Ello no obstante, puede ser observado cómo el escurrimiento tiene lugar de izquierda a derecha, debido a la mayor energía piezométrica en A que en B. a pesar de una presión en A considerablemente menor que la correspondiente a B.



**Figura 24**  
Interpretación de la Ecuación de Bernoulli

El resto de los conceptos analizados en la figura anterior puede ser fácilmente extrapolados a la que se tiene en análisis. En particular las ecuaciones de Bernoulli tendrán la misma expresión puesto que se han nombrado igual los puntos considerados.

Es de destacar que ahora el agua desciende en el medio permeable, en el mismo sentido del gradiente de  $h$ .



Finalmente, es de interés analizar el caso de la Figura 25, en el que la línea de corriente es horizontal y el espesor del medio permeable se ha considerado decreciente para que se destaque ahora una intensificación del gradiente de  $h$  en el sentido del escurrimiento.

En este caso son iguales las cotas piezométricas en A y en B, mientras que la presión es mayor en A. Por ser la altura piezométrica en A mayor que en B el escurrimiento tiene lugar de izquierda a derecha y escurre horizontalmente (ni asciende ni desciende) en la línea de corriente considerada.

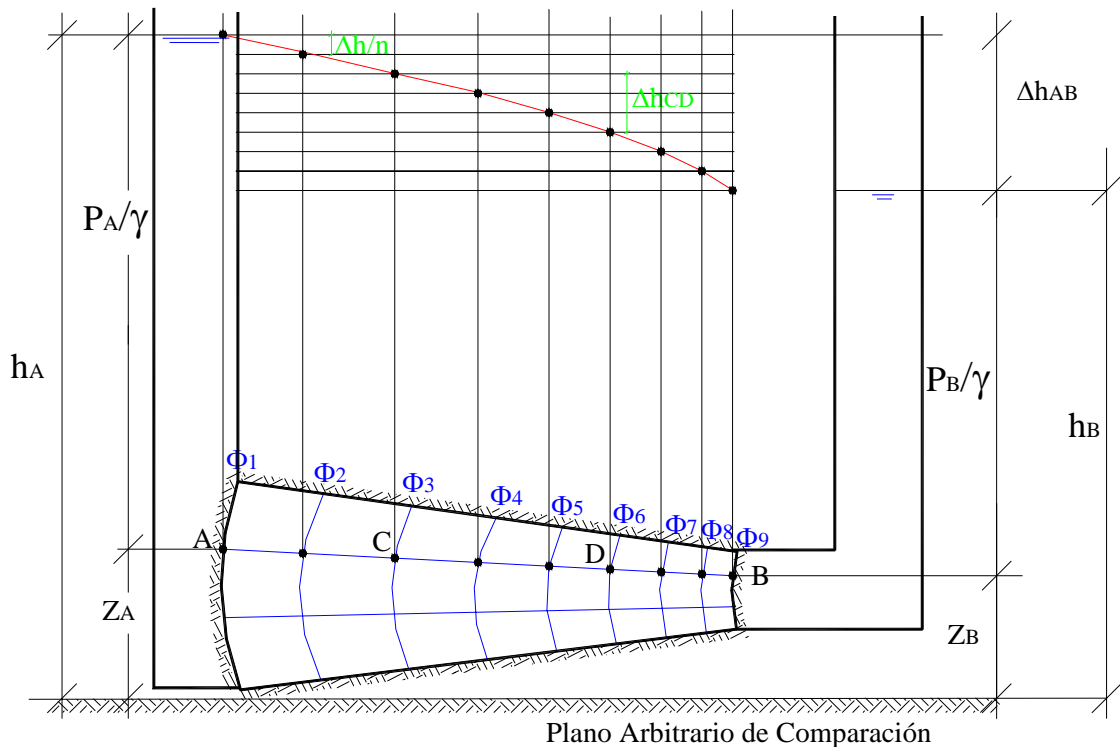


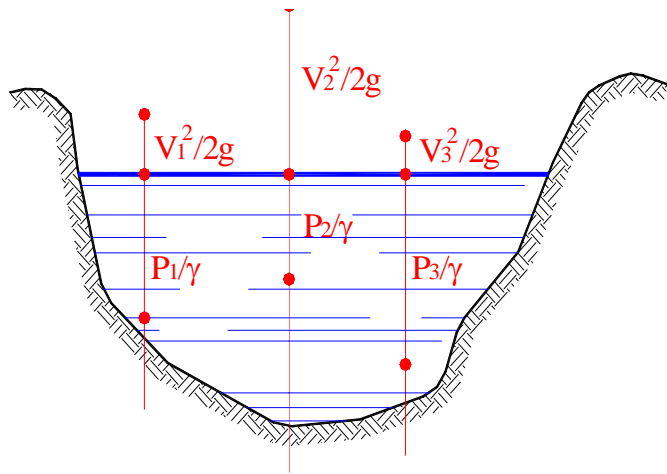
Figura 25

### 9.3.2- Extensión de la Expresión de Bernoulli a todo el Campo del Escurrimiento

Nótese que hasta el presente se ha aplicado la expresión de Bernoulli solo en la línea de corriente, lo que surge como lógica consecuencia de la integración de la ecuación general de Navier-Stokes a lo largo de la misma.

Si pretendemos extender el concepto a un movimiento permanente bidimensional y vertical (que es justamente cuando la red en estudio tiene mayores aplicaciones para los medios permeables), es decir cuando pretendemos establecer relaciones entre puntos de distintas líneas de corriente, en rigor de verdad las alturas de Bernoulli no son iguales.

En efecto, en la Figura 26 se interpreta el hecho real en la sección transversal de un canal. Cada punto es la intersección con una l.d.c. y puede observarse que para cada una de ellas la suma de energías da valores distintos.



Nótese que la altura dada por la suma de términos de la expresión de Bernoulli, no es, ni tiene que ser la misma en los puntos 1, 2 y 3.

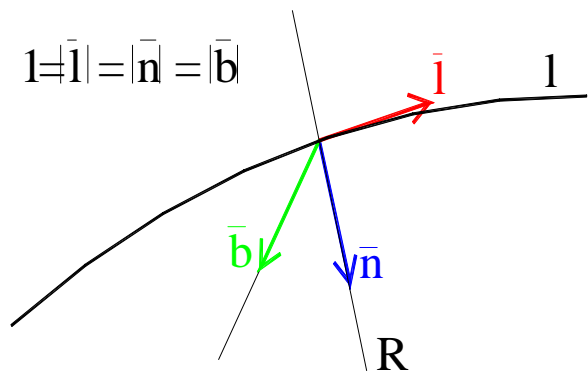
Es obvio que resulta del mayor interés obtener conclusiones y reglas de aplicación válidas para todo el campo del escurrimiento. (En el caso de la figura para toda la sección transversal).

**Figura 26**

Distintas alturas para cada l.d.c.

Esto puede ser aclarado considerando las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas intrínsecas según los ejes indicados por los versores  $\bar{l}$ ;  $\bar{n}$ ;  $\bar{b}$ , es decir los correspondientes al eje "tangente a la curva", "normal" y "binormal" a la misma, tal como puede ser apreciado en la Figura 27.

Es interesante destacar que para el movimiento bidimensional, el eje "binormal" resulta perpendicular al plano en el que tiene lugar el escurrimiento.



**Figura 27**

Si se denominan con L, N y B las componentes de las fuerzas por unidad de masa, la expresión de Navier-Stokes en coordenadas intrínsecas resulta:

$$L - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + v \nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{V^2}{2} \right)$$

$$N - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R}$$

$$B - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} = 0$$

En la anterior, en los segundos miembros de las igualdades, aparecen las componentes intrínsecas del vector aceleración y para un escurrimiento permanente (ver Anexo "El vector aceleración en la terna intrínseca"). Se desprende que el mismo tiene componente nula según el eje binormal, y  $\frac{V^2}{R}$  según el eje de la normal (coincidente con el radio de curvatura).

Si el valor de V es pequeño, su cuadrado resulta despreciable y si, por otra parte, R es muy grande (tiende a  $\infty$ ) el cociente  $\frac{V^2}{R}$  tiende a anularse. En ambos casos, los conceptos apuntados conocidos como "Reglas de Bresse", llevan a que la componente del vector aceleración según la normal es nula.

Es de destacar que en el caso del escurrimiento en medios permeables, la baja velocidad inherente al mismo, automáticamente implica el cumplimiento de una de las reglas apuntadas, la que se cumple aún en el caso de que el radio de curvatura R no sea grande.

Si por otra parte se recuerda de la "Geometría Analítica" que en el campo gravífico terrestre las componentes intrínsecas según el eje vertical "z" son el producto de -g con el coseno director correspondiente, se tiene que:

$$L = -g \cos(\bar{z}; \bar{l}) = -g \frac{\partial z}{\partial l}$$

$$N = -g \cos(\bar{z}; \bar{n}) = -g \frac{\partial z}{\partial n}$$

$$B = -g \cos(\bar{z}; \bar{b}) = -g \frac{\partial z}{\partial b}$$

Por lo que las expresiones quedan ahora:

$$-g \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + v \nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{V^2}{2} \right)$$

$$-g \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

$$-g \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} = 0$$

Al dividir por g, y multiplicar por  $-d\bar{l} = d\bar{l} + d\bar{n} + d\bar{b}$  (componentes intrínsecas del vector "desplazamiento elemental"), se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial l} dl + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial l} dl - \frac{1}{g} v \nabla^2 V dl = - \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{V^2}{2g} \right) dl$$

$$\frac{\partial z}{\partial n} dn + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial n} dn = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial b} db = 0$$

Es de destacar que la integración según  $l$ , es decir según la línea de corriente, nos conduce nuevamente a la expresión de Bernoulli, cuyo tratamiento para las aplicaciones a los medios permeables, ya fue realizado.

En cambio, resulta evidente que la integración según los ejes normal y binormal, conducen a la expresión:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cte}$$

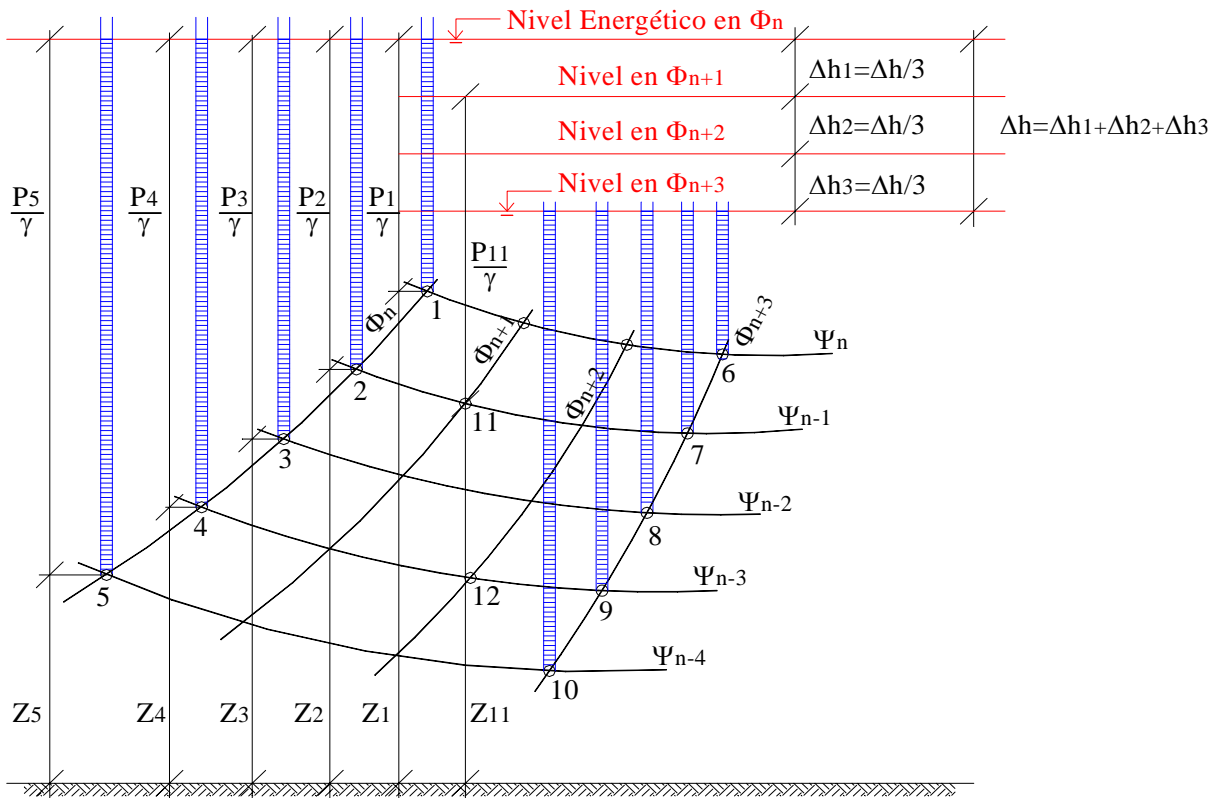
La importancia del razonamiento anterior radica en que para una misma línea equipotencial, en todos los puntos de la misma (los que implican cada uno una línea de corriente ortogonal distinta) **el valor de la "altura piezométrica"** dado por la anterior permanece constante.

Por otra parte, al ser la velocidad en los medios permeables muy pequeña y consecuentemente el término de "energía cinética" de la expresión de Bernoulli despreciable, resulta en el sentido del escurrimiento (tal como se ha elaborado precedentemente):

$$z + \frac{p}{\gamma} + \Delta h = \text{cte}$$

Esta expresión es ahora válida para todos los puntos de una equipotencial y consecuentemente para las infinitas líneas de corriente que le son ortogonales. Al cambiar de equipotencial cambia el valor de  $\Delta h$  según la ley de Darcy.

Los conceptos desarrollados permiten el uso práctico de las expresiones de la "altura piezométricas" y consecuentemente de la expresión de Bernoulli, en todos los puntos del escurrimiento caracterizado por una dada red de escurrimiento. En su conjunto significan "la extensión de la expresión de Bernoulli a todo el campo de velocidades", indistintamente e independientemente de en qué línea de corriente se encuentren los puntos entre los que se hacen los planteos energéticos.



**Figura 28**  
Extensión de Bernoulli a toda la red

En la Figura 28, en la que se aprecia una región de una dada red de escurrimiento en un medio permeable, se destacan las propiedades que surgen de los conceptos analizados.

Si se considera una línea equipotencial  $\phi_n$  a todos los puntos de la misma le corresponde un nivel energético como el indicado. Los piezómetros indicados en los puntos que van del 1 al 5, permiten interpretar los valores de las “alturas piezométricas  $h_i$ ”, las que medidas con respecto a un plano de comparación arbitrario, resultan todas iguales. En efecto, del análisis surge claramente que:

$$h_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma}; h_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma}; \dots; h_5 = z_5 + \frac{p_5}{\gamma}$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5$$

En la línea equipotencial  $\phi_{n+3}$  se puede hacer un planteo similar, pero considerando ahora que el nivel energético ha descendido en un valor  $\Delta h$ , dado por la ley de Darcy. En ese caso resultan:

$$h_6 = z_6 + \frac{p_6}{\gamma} ; h_7 = z_7 + \frac{p_7}{\gamma} ; \dots ; h_{10} = z_{10} + \frac{p_{10}}{\gamma}$$

$$h_6 = h_7 = h_8 = h_9 = h_{10}$$

Si se plantea Bernoulli entre las equipotenciales  $\phi_n ; \phi_{n+3}$ , en cada una de las distintas líneas de corriente puede escribirse que:

$$h_1 = h_6 + \Delta h = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_6 + \frac{p_6}{\gamma} + \Delta h$$

.....

$$h_5 = h_{10} + \Delta h = z_5 + \frac{p_5}{\gamma} = z_{10} + \frac{p_{10}}{\gamma} + \Delta h$$

De acuerdo a todo lo expuesto también es posible plantear la expresión de Bernoulli entre puntos en distintas líneas de corriente, en efecto planteando, por ejemplo, entre los puntos 1 y 10, se tiene:

$$h_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_{10} + \frac{p_{10}}{\gamma} + \Delta h$$

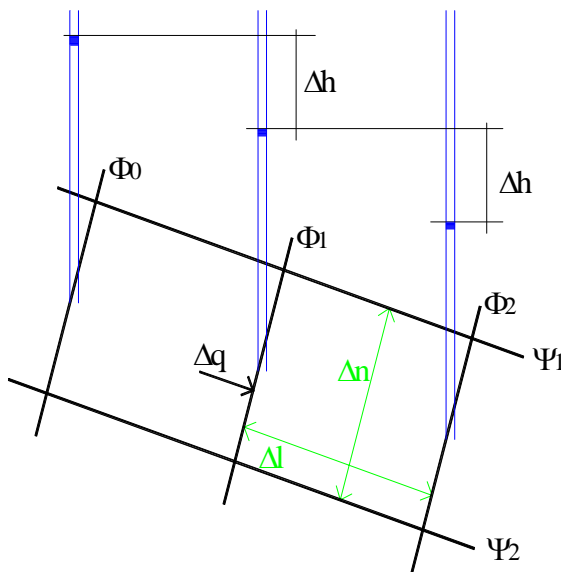
y entre los puntos 11 y 12:

$$h_{11} = z_{11} + \frac{p_{11}}{\gamma} = z_{12} + \frac{p_{12}}{\gamma} + \frac{\Delta h}{3}$$

En resumen, **es factible plantear la expresión de Bernoulli entre todos los puntos de un escurrimiento en un medio permeable**. Si los mismos se encuentran sobre una equipotencial el valor de la "altura piezométrica  $h_i$ ", respecto de un plano de comparación, se mantiene constante, a pesar de que son distintos para cada punto, los valores de  $z_i$  y  $\frac{p_i}{\gamma}$  que la integran. En cambio, si se plantean entre puntos entre distintas equipotenciales e incluso entre distintas líneas de corriente, deberá ser tenido en cuenta el término de "pérdida de energía hidráulica  $\Delta h$ ".

## 10- EL CÁLCULO DEL CAUDAL EN LOS MEDIOS PERMEABLES MEDIANTE LAS REDES DE ESCURRIMIENTO

Uno de los usos más importantes de las redes de escurrimiento en medios permeables es el del cálculo del caudal que pasa en determinadas regiones del mismo, en especial cuando alguna singularidad, interfiere en el normal escurrimiento que tiene lugar normalmente.



**Figura 29**

La Figura 29 posibilita analizar la utilidad de la red para el propósito enunciado. En realidad una red posibilita el conocimiento del campo de velocidades en forma relativa, puesto que la misma puede satisfacer a infinitas posibilidades de caudal que escurre. Conocido el caudal que pasa, el conocimiento del valor numérico del campo de velocidades en cada uno de sus puntos, es inmediato.

En el caso de los medios permeables, la ley de Darcy y su vinculación con la función potencial de velocidades  $\phi$  y la expresión de Bernoulli (temas desarrollados precedentemente), son los hechos que permiten vincular la red de escurrimiento con los caudales que escurren por el medio permeable de características dadas.

En la figura se representan dos cuadrángulos continuos de una determinada red de escurrimiento en un medio permeable de permeabilidad  $k$ ; forma parte de un conjunto formado por  $n+1$  líneas de corriente, siendo en consecuencia  $n$  el número de "tubos de corriente bidimensionales" de la red. De la misma forma, se consideran tres equipotenciales de las  $m+1$  que completan la misma, siendo  $m$  el número de "celdas equipotenciales" de todo el conjunto.

Por el tubo de corriente formado por las dos líneas de corriente consideradas, escurre una porción del caudal total  $Q$ :

$$\Delta q = \frac{Q}{n}$$

Entre dos equipotenciales se produce una caída del nivel piezométrico  $\Delta h$  (medido por la diferencia de los niveles en los dos piezómetros ubicados en dos equipotenciales consecutivas), que respecto a la carga total disponible  $H$ , será:

$$\Delta h = \frac{H}{m}$$

El caudal que pasa entre las líneas de corriente y equipotenciales acotadas en la figura, vale, teniendo en cuenta la ley de Darcy:

$$\Delta q = v \Delta n = k \frac{\Delta h}{\Delta l} \Delta n$$

reemplazando  $\Delta q$  y  $\Delta h$ :

$$\frac{Q}{n} = k \frac{H}{m} \frac{\Delta n}{\Delta l}$$

de donde:

$$Q = k H \frac{n}{m} \frac{\Delta n}{\Delta l}$$

Al recordar que una de las características en el trazado de la red es que  $\Delta n$  debe ser igual a  $\Delta l$ , la expresión final resulta:

$$Q = k H n / m$$

La expresión anterior posibilita el cálculo del caudal para una región del escurrimiento y en función del número de líneas de corriente y equipotenciales involucradas en la misma. Evidentemente, si la región implica el campo total del escurrimiento, el caudal obtenido también será el caudal total que escurre en el dominio del campo considerado.



## ANEXO - EL VECTOR ACELERACIÓN EN COORDENADAS INTRÍNSECAS

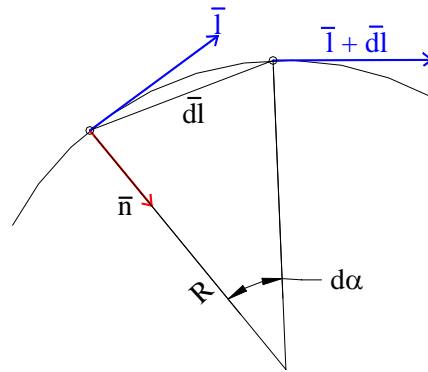
El siguiente desarrollo tiene como objetivo demostrar, para satisfacer así la eventual inquietud de los interesados sin que tengan que recurrir a otra bibliografía, las expresiones escritas en el numeral 9.3.2, cuando se desarrolló el tema de la extensión de la expresión de Bernoulli a todo el campo del escurrimiento.

El vector aceleración es por definición:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\bar{i}) = \frac{dV}{dt}\bar{i} + \frac{d\bar{i}}{dt}V$$

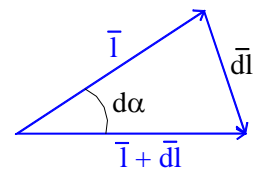
pero puede ser considerado que:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{d\bar{i}}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{d\bar{i}}{dl}V$$



Nota:

Al ser  $d\alpha$  muy chico,  $d\bar{i}$  prácticamente es paralelo al  $\bar{n}$  anterior



**FIGURA 30**

por lo que reemplazando en la anterior, se tiene:

$$\bar{a} = \frac{dV}{dt}\bar{i} + V^2 \frac{d\bar{i}}{dl}$$

Del análisis de la figura se deducen los siguientes conceptos:

$$dl = R d\alpha; |\bar{i} + d\bar{i}| = |\bar{i}| = 1; d\bar{i} = d\alpha \bar{n}; d\bar{i} = |d\bar{i}| \bar{n}; |d\bar{i}| = 1 \cdot d\alpha$$

por lo que la variación del versor  $\bar{i}$  en el recorrido, resulta:

$$\frac{d\bar{i}}{dl} = \frac{d\alpha \cdot \bar{n}}{R \cdot d\alpha} = \frac{1}{R} \bar{n}$$

Reemplazando se obtiene que el vector aceleración resulta:

$$\bar{a} = \frac{dV}{dt}\bar{i} + \frac{V^2}{R}\bar{n}$$

Pero como por otra parte  $dV$  es:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial l} dl + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

por lo que

$$a_1 = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial l} \frac{dl}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Finalmente la expresión del vector aceleración en coordenadas intrínsecas resulta:

$$\bar{a} = \left[ \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} \right] \bar{i} + \frac{V^2}{R} \bar{n}$$

Obviamente, para régimen permanente se anula la derivada del módulo de la velocidad con respecto al tiempo, con lo que la expresión queda:

$$\bar{a} = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{V^2}{R} \right) \bar{i} + \frac{V^2}{R} \bar{n}$$