
INSTITUTO DE INGENIERÍA SANITARIA
Y AMBIENTAL

ÁREA DE HIDRÁULICA

CÁTEDRA DE HIDRÁULICA APLICADA A LA
INGENIERÍA SANITARIA

**LOS NÚMEROS ADIMENSIONALES DE
REYNOLDS Y FROUDE Y SU APLICACIÓN EN LA
HIDRÁULICA DE LA INGENIERÍA SANITARIA**

NG. LUIS PEREZ FARRAS

AGOSTO DE 2005

NOTA DEL AUTOR

Un agradecimiento muy especial a la Inga. María Eva Koutsovitis, colaboradora en nuestras cátedras de Hidráulica de la carrera del instituto, y ayudante primero de la cátedra de grado “Hidráulica General”, quién se encargó de la crítica, mejoras, revisión y edición del texto original.

En el entendimiento que el texto que nos ocupa es indistintamente de interés para las Cátedras de la carrera de grado de Ingeniería Civil “Hidráulica General” y “Construcciones Hidráulicas” y además y sobre todo, para nuestra Cátedra del curso de postgrado, se publica el presente en las respectivas páginas Web, a los efectos que tanto los alumnos de postgrado como los de grado, puedan disponer del mismo.

Luis E. Pérez Farrás

1.- EL NÚMERO DE REYNOLDS

1.1.- GENERALIDADES

La experiencia confirma que el escurrimiento de los fluidos reales puede tener lugar de dos formas distintas: laminar y turbulento.

Las características fundamentales del escurrimiento laminar son el paralelismo entre los distintos filamentos que componen la corriente y el retorno a esta situación, aún después de ocurrida cualquier perturbación del régimen de velocidades (debida a causas externas al fluido que escurra).

En cambio, si las perturbaciones consiguen mantenerse, el escurrimiento se denomina turbulento. Para velocidades medias relativamente importantes el escurrimiento se caracteriza por un entremezclado de las partículas fluidas con un intenso intercambio de masa y no pudiéndose definir filamentos como en el caso del movimiento laminar.

El régimen turbulento se caracteriza por su elevada inestabilidad, es decir la variación instantánea de velocidades y el intercambio de masa más que evidente.

En el régimen laminar los estratos no se mezclan entre sí y sólo tiene lugar el intercambio molecular entre los mismos, lo que da origen a la denominada viscosidad dinámica o absoluta como propiedad inherente del fluido en particular.

Justamente los valores relativamente bajos de la viscosidad frente a su masa específica son los que hacen inestables a los escurrimientos dando lugar al régimen turbulento. El agua presenta una viscosidad baja en relación a su masa específica, por lo tanto es muy fácil que escurra en régimen turbulento.

Basta apreciar brevemente el escurrimiento del agua, hasta simplemente con un grifo domiciliario abierto, para apreciar la falta de uniformidad real de un líquido (o fluido por extensión) en régimen turbulento, pues las trayectorias de las partículas son absolutamente distintas en el tiempo, contrariando en principio lo que definimos como "escurrimiento uniforme".

Al ser la falta de uniformidad una característica distintiva del régimen turbulento ... **¿Cómo se puede entonces caracterizar como uniforme un escurrimiento en régimen turbulento?...** La explicación y la gran utilidad práctica de la misma es debida a los estudios de Boussinesq, quien determinó que en un determinado punto del espacio en un medio continuo en régimen turbulento, la velocidad media temporal si se consideran tiempos suficientemente largos (superiores al minuto) se la puede considerar como invariable y representativa del escurrimiento.

Al reemplazar las velocidades instantáneas por estas velocidades medias temporales se obtiene el régimen uniforme, el que se simplifica aún más si se

tiene en cuenta para el caso de las conducciones unidimensionales (el que nos ocupa mayoritariamente en la problemática de nuestras aplicaciones) el concepto de velocidad media U en cada sección transversal.

Un ejemplo clarificador de los conceptos de Boussinesq, que posibilitan “uniformizar al régimen turbulento” en base al concepto de velocidades medias temporales, es el siguiente:

Si se considera un recipiente de un volumen dado alimentado por una conducción y regulado con una válvula abierta en una dada posición (por ejemplo totalmente abierta), el volumen V se llenará en un tiempo t . Si se repite el proceso numerosas veces tomando el tiempo, se podrá apreciar que el volumen será llenado siempre en ese mismo tiempo t .

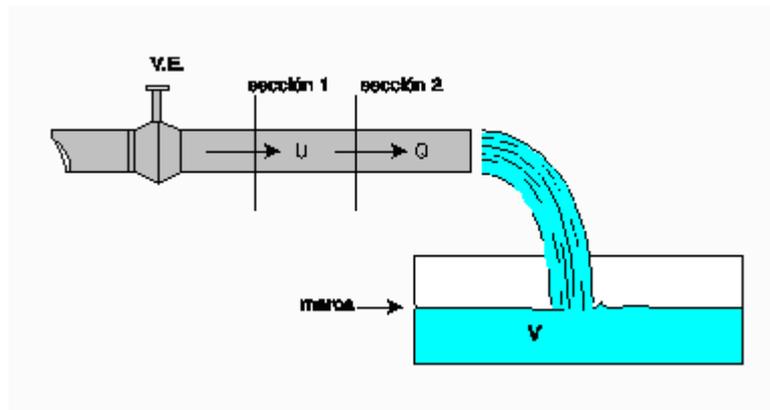


Figura 1
Ejemplo para interpretar a Boussinesq

Si se determinara hipotéticamente el volumen llenado en un tiempo muy pequeño (por ejemplo décimas de segundo) y se midiera ese tiempo, se encontraría que el tiempo t para llenar el volumen, multiplicando el pequeño volumen por el número necesario de veces para lograr el volumen V , daría muy distinto al medido en las reiteradas experiencias a largo plazo.

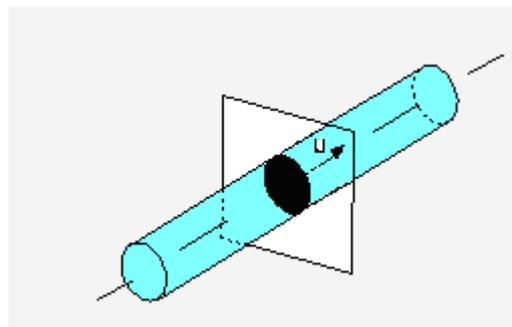


Figura 2
Velocidad media

Fácil es inferir que la definición del concepto de caudal que pasa por la conducción, se obtiene simplemente de determinar el cociente

$$Q = \frac{V}{t}$$

Además la velocidad media, se determina fácilmente teniendo en cuenta que

$$Q = U \Omega = U \frac{\pi D^2}{4}$$

Por lo que
$$U = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

De esta forma se realiza en forma simple, con criterio tecnológico y empíricamente la integración que el concepto de velocidad media implica, dado que por definición es:

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \bar{V} d\Omega$$

1.2.- ESQUEMA DE INSTALACIÓN PARA LA EXPERIENCIA DE REYNOLDS Y EXPLICACIÓN DE LA MISMA

Reynolds, en 1881, realizó experiencias que le permitieron definir y cuantificar, a través del número que lleva su nombre, la forma en que escurre un fluido.

Las experiencias consistieron en hacer escurrir un caudal de agua variable a voluntad a través de un tubo cilíndrico horizontal de vidrio transparente. Lograba visualizar un filamento mediante la inyección de un colorante a través de una aguja inyectora, colocada en el abocinamiento de entrada del tubo.

Observó que para pequeños caudales (consecuentemente bajas velocidades) con el mismo líquido y el mismo tubo (viscosidad y diámetro del tubo constantes) el cambio de régimen se producía a velocidades tanto más altas cuanto más altas fueran las viscosidades cinemáticas de los fluidos empleados.

Nota. Dado que la viscosidad del fluido es función de la temperatura, pudo determinar numerosísimas experiencias, tan solo variando la temperatura del mismo.

Esto le permitió a Reynolds definir el número adimensional que lleva su nombre, que gobierna el proceso y que para tubos cilíndricos se expresa:

$$Re = \frac{UD}{\nu}$$

- En la que U es la velocidad media en la sección transversal.
- D es el diámetro del tubo.
- ν es la viscosidad cinemática del agua variable con la temperatura.

En la Figura N°3 se presenta el esquema de la instalación adoptada hoy por muchos laboratorios y concretada, en el año 1942, por el Ing. Miganne en el laboratorio Guillermo Céspedes de la Universidad Nacional de La Plata.

Puede observarse que el tubo de experiencias se ha dispuesto vertical mientras que la instalación original de Reynolds presentaba el tubo horizontal.

Con ésto se logra aumentar la sensibilidad de las experiencias puesto que se corrige el defecto de la instalación original, en la que el filamento coloreado debido a la mayor masa específica del colorante no guarda una posición horizontal. Es más, la acción de la gravedad es tal que en muchas ocasiones el filamento coloreado podría llegar a tocar las paredes del tubo.

Evidentemente, con el tubo vertical, al provocarse un escurrimiento en sifón se soluciona el problema.

A partir del número adimensional de Reynolds, se define el valor por debajo del cual el escurrimiento del fluido ha de responder siempre a la característica de laminar.

Según Schiller el valor crítico corresponde a 2300; para valores menores el régimen es netamente laminar. Para valores comprendidos entre 2300 y 200000, el escurrimiento tiene características de "poco turbulento", haciéndose netamente "turbulento" para valores mayores de 200000.

El número de Reynolds puede variar según sea la dimensión lineal que se utilice. En general, se opta por el diámetro del conducto en el caso de escurrimientos a presión en conductos circulares.

En caso de conductos no circulares la dimensión lineal a ser utilizada es el "Radio medio hidráulico" definido como:

$$R = \frac{\Omega}{\chi}$$

En la que Ω es la "sección mojada" (sección del fluido en escurrimiento) y χ el "perímetro mojado" (la longitud de contacto entre la sección y el fluido). Esta definición del Número de Reynolds es muy utilizada en "Escurrecimientos a superficie libre" o canales.

Para el caso de secciones transversales circulares se tiene que:

$$R = \frac{\Omega}{\chi} = \frac{\pi D^2}{4 \pi D} \quad \therefore R = D/4$$

La expresión anterior posibilita calcular otras formas que no sean la circular, reemplazando en el Número de Reynolds D por $4R$.

El número de Reynolds escrito en función de la viscosidad dinámica y del Diámetro resulta:

$$Re_D = \frac{\rho U D}{\mu}$$

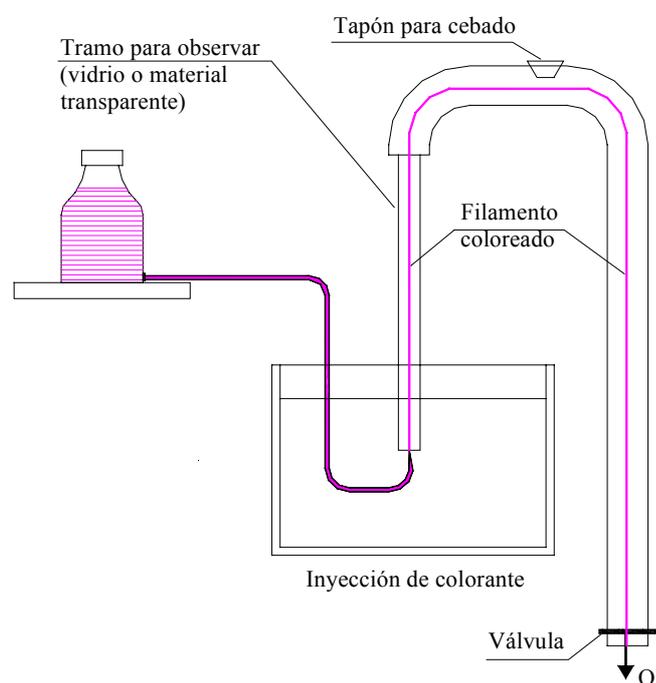


Figura 3
Instalación para la Experiencia de Reynolds

La expresión previa pone de manifiesto que el movimiento se producirá en régimen laminar cuando la viscosidad dinámica sea preponderante sobre la masa específica del líquido, es decir cuando la energía viscosa resistente puesta en juego en el movimiento sea mayor que la energía cinética del mismo.

En el caso particular del agua, que es el que nos ocupa, los valores de μ resultan pequeños, predominando los efectos de inercia debidos a la masa específica y resultando en consecuencia los movimientos fácilmente "turbulentos" por lo que, en los problemas prácticos, suele superarse el límite de 200000. Por lo tanto, los escurrimientos que se estudiarán en hidráulica de las conducciones generalmente han de ser "netamente turbulentos" cuando se trabaje con los diámetros usuales de las instalaciones externas que superan siempre a los 150 mm.

2- LOS NÚMEROS ADIMENSIONALES DE REYNOLDS Y FROUDE

2.1.- GENERALIDADES

Se recuerda que la compleja expresión diferencial de Navier y Stokes expresada vectorialmente resulta:

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\nu \nabla^2 \mathbf{V}}{g} = \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \text{rot } \bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{V}} + \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right)$$

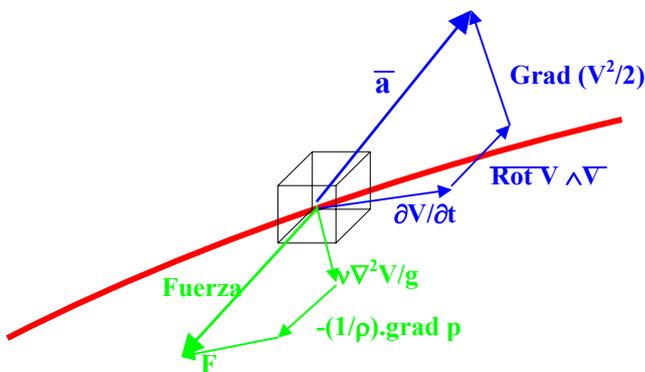


Figura 4

Equilibrio Dinámico de la Partícula Fluida Real

La anterior implica que las fuerzas por unidad de masa, aplicadas a una partícula elemental en movimiento a lo largo de su trayectoria, debidas a la masa de la misma, la presión y la resistencia viscosa, igualan al vector aceleración, el que presenta a su vez tres componentes, debidas a la impermanencia, la rotacionalidad y la convección del vector velocidad en el espacio.

Las fuerzas nombradas son las resultantes de la interacción entre la partícula elemental de fluido y las partículas del medio continuo circundante.

Escribiendo la expresión de Navier Stokes en forma simplificada y considerando las fuerzas (es decir multiplicando la anterior por la masa de la partícula elemental) resulta:

$$\sum \bar{F} = \bar{F}_m + \bar{F}_p + \bar{F}_\mu = \Delta m \bar{a}$$

En la que:

- $\sum \bar{F}$ es la suma de las fuerzas actuantes o su resultante.
- \bar{F}_m es la fuerza debida a la masa de la sustancia fluida.
- \bar{F}_p es la fuerza debida a las presiones actuantes en las caras de la partícula elemental en movimiento debido a la interacción con el medio circundante (el propio fluido).
- \bar{F}_μ es la fuerza debida a los esfuerzos tangenciales actuantes en las caras de la partícula elemental en movimiento debido a la interacción con el medio circundante (el propio fluido).

-
- Δm es la masa de la partícula elemental.

2.2.- BREVE EXPLICACIÓN DE LA TEORÍA DE MODELOS FÍSICOS

La expresión simplificada de Navier y Stokes escrita para Prototipo resulta:

$$\sum \overline{F_p} = \overline{F_{mp}} + \overline{F_{pp}} + \overline{F_{\mu p}} = \Delta m_p \overline{a_p}$$

y para el modelo:

$$\sum \overline{F_m} = \overline{F_{mm}} + \overline{F_{pm}} + \overline{F_{\mu m}} = \Delta m_m \overline{a_m}$$

La escala de fuerzas resulta consecuentemente:

$$e_f = \frac{\sum \overline{F_p}}{\sum \overline{F_m}} = e_m e_{am}$$

Fácil es inferir que es imposible la semejanza total entre las fuerzas actuantes en el modelo y las homólogas actuantes en el prototipo. Un ejemplo claro lo brinda la imposibilidad de poner en escala la granulometría de lechos de ríos, o la rugosidad de los contornos sólidos, o el pulimento de los álabes de una máquina prototipo, siempre más logrado que en la máquina modelo mucho más reducida en dimensiones.

Es por ello que en modelación física se habla en realidad de “similitud” en vez de “semejanza”, concepto por el cual se entiende que lo que se pone en escala entre modelo y prototipo es la fuerza predominante en el fenómeno en estudio.

A los resultados experimentales obtenidos sobre el modelo habrá que aplicarles coeficientes correctivos basados en las reiteradas experiencias existentes, los cuales corregirán la acción despreciada del resto de las fuerzas actuantes.

El caso que más nos interesa, el de las máquinas hidráulicas, en especial las bombas, la gran experiencia disponible basada en innumerables ensayos realizados durante muchísimos años ha dado lugar a expresiones correctivas empíricas que aplicadas a los ensayos del modelo posibilitan predecir los parámetros del prototipo con notable aproximación.

2.3.- PROCEDIMIENTO

2.3.1.- FUERZAS INERCIALES

El módulo de la fuerza inercial resulta:

$$f_i = \Delta m a = \rho \tau a = \rho L^3 \frac{L}{T^2} = \rho L^2 V^2$$

La escala de las fuerzas inerciales resulta entonces:

$$e_{f_i} = e_\rho e_L^2 e_v^2$$

La expresión anterior es conocida como la ley de Reech- Froude.

2.3.2-FUERZAS VISCOSAS

El módulo de la fuerza viscosa resulta:

$$f_\mu = \tau \Delta \Omega = \Delta m a$$

pero
$$\tau = \mu \frac{dv}{dz} \quad \therefore f_\mu = \mu \frac{dv}{dz} \Delta \Omega$$

Recordando que por definición $\nu = \frac{\mu}{\rho}$; consecuentemente la escala de μ resulta:

$$e_\mu = e_\nu e_\rho$$

En escalas entre prototipo y modelo se tiene que:

$$e_{f_\mu} = e_\mu \frac{e_v}{e_L} e_L^2 = e_\rho e_\nu e_L^2 \frac{e_v}{e_L} = e_\rho e_\nu e_L e_v$$

Igualando a la escala de fuerzas inerciales se tiene:

$$e_\rho e_\nu e_L e_v = e_\rho e_L^2 e_v^2$$

Luego de las simplificaciones la expresión anterior resulta:

$$e_L e_v = e_v^2 \quad \therefore \frac{e_L e_v}{e_v} = 1$$

Reemplazando el concepto de escala en la expresión anterior:

$$\frac{L_p/L_m \quad V_p/V_m}{\nu_p/\nu_m} = 1$$

Disponiendo los términos con igual subíndice de cada lado de la igualdad, se tiene:

$$\frac{L_p V_p}{\nu_p} = \frac{L_m V_m}{\nu_m}$$

$$R_e = \frac{L V}{\nu} = cte$$

La expresión anterior es la expresión del número de Reynolds en su forma más general. La dimensión lineal se adopta para cada caso (por ejemplo el diámetro de las tuberías en conducciones circulares, o el diámetro de la partícula discreta en el caso de la sedimentación).

2.3.3.- FUERZAS GRAVITACIONALES

El módulo de la fuerza de gravedad resulta:

$$F_m = \rho \tau g$$

En escalas: $e_{fm} = e_\rho e_{L^3} e_g$

Igualando las escalas de fuerzas de masa con las de inercia se obtiene:

$$e_{fi} = e_\rho e_L^2 e_v^2 = e_\rho e_{L^3} e_g$$

Simplificando e igualando a 1:

$$e_{v^2} = e_L e_g \quad \therefore \frac{e_{v^2}}{e_L e_g} = 1$$

Reemplazando por el concepto de escala entre prototipo y modelo se obtiene:

$$\frac{\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2}{\frac{L_p}{L_m} \frac{g_p}{g_m}} = 1$$

La que agrupando según subíndices homólogos de cada lado de la igualdad resulta:

$$\frac{V_p^2}{L_p g_p} = \frac{V_m^2}{L_m g_m} = F = cte$$

$$F = \frac{V^2}{L g} = cte$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{L g}} = cte$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{g h}} = cte$$

Las expresiones anteriores son las más utilizadas del número de Froude. La dimensión lineal se adopta según corresponda en cada caso de aplicación. En el caso de los canales se adopta el "tirante h " del mismo.

3- INTERPRETACIÓN DE LOS NÚMEROS DE REYNOLDS Y FROUDE

3.1- GENERALIDADES

La igualdad de los números de Froude o de Reynolds entre modelo y prototipo, implica, tal como pudo probarse en el proceso deductivo poner en escala las fuerzas predominantes del fenómeno en ambos casos.

Cuando se comparan instalaciones o máquinas con escurrimientos claramente turbulentos, las fuerzas predominantes que logran la inestabilidad del régimen nombrado son las gravitatorias, por lo que su idéntico número de Froude indicará que existe marcada similitud entre ambas comparaciones o ensayos.

Cuando las predominantes son las fuerzas viscosas, la estabilidad del régimen es la característica principal, por lo que la igualdad de los números de Reynolds asegura la similitud en las comparaciones o ensayos.

Es de destacar que cuando se conoce una compleja instalación hidráulica exitosa y se desea diseñar una similar para valores de caudales distintos una forma adecuada es usar la igualdad del número de Froude entre ambas (dado que el escurrimiento será turbulento en condiciones normales) y deducir de ambas la escala apropiada de longitudes para el nuevo diseño.

3.2- APLICACIONES USUALES DEL NÚMERO DE REYNOLDS EN LA HIDRÁULICA

3.2.1.- ECUACIÓN GENERAL DE RESISTENCIA

Nos proponemos determinar la intensidad de la fuerza resistente que se produce cuando un cuerpo con un contorno dado es obligado a desplazarse en un fluido en reposo.

La expresión que hallaremos tiene validez general y puede ser aplicada para evaluar tanto la resistencia al avance de una nave submarina, la de un avión, o la resistencia opuesta a la decantación de una partícula en un líquido en reposo. A pesar de lo distintos que pueden parecer estos problemas en un análisis superficial, fácil es comprender que esencialmente constituyen un fenómeno físico similar.

Nuestro interés fundamental es determinar la fuerza resistente que habrá de oponerse al desplazamiento vertical de una partícula discreta (motivado éste por acción de la gravedad) en el seno de un líquido, que en nuestro caso será invariablemente agua y cuyo peso específico ha de ser obviamente menor que el de la partícula.

A este proceso que denominamos con toda generalidad "sedimentación" lo estudiaremos en detalle considerando que la partícula es "discreta", es decir, que no cambia su tamaño, forma (la que suponemos esférica), peso ni individualidad.

La experiencia demuestra que el módulo de la fuerza de resistencia que nos proponemos evaluar responde a la siguiente función :

$$F_{\text{res}} = f(V_s, L, \Omega, \rho, \mu)$$

Donde:

- V_s es la velocidad de sedimentación de la partícula.
- L es una longitud característica, en nuestro caso consideraremos al diámetro d_p de la partícula.
- Ω es un área característica y en nuestro caso es el área que se obtiene de un corte de la partícula con un plano que contenga su baricentro, por lo que:

$$\Omega = \frac{\pi \cdot d_p^2}{4}$$

- ρ es la masa específica de la partícula .
- μ es la viscosidad dinámica del líquido .

Para encontrar la ecuación que nos vincule a las distintas variables intervinientes nos valdremos del "Análisis Dimensional", utilizando el método de Raleigh.

El mismo se basa en el principio de la homogeneidad de las dimensiones de las ecuaciones.

Este concepto proporciona un método para la determinación de la estructura de ecuaciones físicas a partir de las variables intervinientes en un dado fenómeno en estudio y sus dimensiones.

La experiencia del investigador, plasmada en un íntimo conocimiento de las características físicas del fenómeno en estudio, es la que indica en cada caso las variables a considerar.

Es de hacer notar que aunque la homogeneidad dimensional es condición necesaria para que la ecuación tenga validez, no por ello cualquier ecuación homogénea es forzosamente correcta.

Existen además muchas formas empíricas no homogéneas desde el punto de vista dimensional pero que reflejan con exactitud datos experimentales correspondientes a un caso dado y a un sistema particular de unidades que delimita el campo de aplicación de la expresión.

Sin embargo para que la validez sea realmente general la ecuación ha de ser dimensionalmente exacta. Incluso es recomendable como verificación de la resolución corriente de problemas una comprobación de la exactitud dimensional, a la vez que numérica, de las ecuaciones utilizadas en el proceso.

De acuerdo al método de Raleigh adoptado, la función puede escribirse de la forma:

$$\frac{F_{\text{res}}}{\Omega} = C \cdot V_s^k \cdot L^m \cdot \rho^n \cdot \mu^s$$

Donde K,m,n y s son exponentes a determinar por el análisis dimensional y C un coeficiente de proporcionalidad a evaluar experimentalmente.

Si consideramos como dimensiones fundamentales a la Masa (M), la Longitud (L) y el Tiempo (T) y tenemos en cuenta que dimensionalmente la fuerza es :

$$[F] = [M \cdot L \cdot T^{-2}]$$

El área es dimensionalmente:

$$[\Omega] = [L^2]$$

El cociente:

$$\left[\frac{F}{\Omega} \right] = \left[\frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2} \right] = [M \cdot L \cdot T^{-2}]$$

La velocidad es:

$$[V] = [L \cdot T^{-1}]$$

La masa específica es:

$$[\rho] = [M \cdot L^{-3}]$$

La viscosidad según la ley de Newton es:

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}$$

Por lo que:

$$\mu = \tau \frac{dy}{dV} = \frac{F}{\Omega} \frac{dy}{dV}$$

La que dimensionalmente resulta:

$$[\mu] = \left[\frac{F}{L^2} \frac{L}{L.T^{-1}} \right] = \left[\frac{M.L.T^{-2}.L}{L^3.T^{-1}} \right] = [M.L^{-1}.T^{-1}]$$

Como la ecuación debe ser necesariamente homogénea desde el punto de vista dimensional, tendremos:

$$[M.L^{-1}.T^{-2}] = [L.T^{-1}]^k . [L]^m . [M.L^{-3}]^n . [M.L^{-1}.T^{-1}]^s$$

O, lo que es lo mismo:

$$[M.L^{-1}.T^{-2}] = [M]^{n+s} . [L]^{k+m-3n-s} . [T]^{-k-s}$$

Como el primer miembro ha de ser dimensionalmente igual al segundo obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} n + s &= 1 \\ k + m - 3n - s &= -1 \\ -k - s &= -2 \end{aligned}$$

Despejando las incógnitas para ponerlas en función de S tendremos:

$$\begin{aligned} n &= 1 - s \\ k &= 2 - s \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores de n y k:

$$(2 - s) + m - 3(1 - s) - s = -1$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} 2 - s + m - 3(1 - s) - s &= -1 \\ -1 - 2s + m + 3s &= -1 \quad , \quad m + s = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore m = -s$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned} n &= 1 - s \\ k &= 2 - s \\ m &= -s \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación básica:

$$\frac{F_{res}}{\Omega} = C \cdot V_s^{2-s} \cdot L^{-s} \cdot \rho^{1-s} \cdot \mu^s$$

Multiplicando y dividiendo por 2 al segundo miembro y operando resulta:

$$\frac{F_{res}}{\Omega} = C \frac{\rho \cdot V_s^2}{2} 2 \left(\frac{V_s \cdot L \cdot \rho}{\mu} \right)^{-s}$$

Como en nuestro caso tomamos como valor de longitud característica el diámetro de la partícula, la anterior resulta:

$$\frac{F_{res}}{\Omega} = C \frac{\rho \cdot V_s^2}{2} 2 \left(\frac{V_s \cdot d_p \cdot \rho}{\mu} \right)^{-s}$$

Pero el término entre paréntesis es el número de Reynolds calculado con el diámetro de la partícula, la velocidad de sedimentación, la masa específica de la misma y la viscosidad del líquido, por lo tanto:

$$F_{res} = f(\text{Re}) C \Omega \frac{\rho \cdot V_s^2}{2}$$

Haciendo: $C_d = C \cdot f(\text{Re})$

Se obtiene finalmente:

$$F_{res} = C_d \Omega \rho \frac{V_s^2}{2}$$

En la que C_d , en función del número de Reynolds, deberá determinarse experimentalmente.

Las investigaciones realizadas al efecto de poder evaluar el valor de C_d para el caso de sedimentación de partículas llevaron a las siguientes conclusiones:

a) Para $Re > 2 \times 10^3$ el valor de $C_d = 0,4$

b) Para $0,5 < Re < 2 \times 10^3$ C_d responde a la ecuación empírica:

$$C_d = \frac{24}{Re} + \frac{3}{\sqrt{Re}} + 0,34$$

c) Para $Re < 0,5$:

$$C_d = \frac{24}{\text{Re}} = \frac{24 \cdot \mu}{V_s \cdot d_p \cdot \rho}$$

Es de destacar que procediendo análogamente se puede determinar la expresión para la fuerza de sustentación que resulta:

$$F_s = C_d \Omega \rho \frac{V_s^2}{2}$$

En la que C_d es un coeficiente a obtener experimentalmente en los túneles de viento y es de gran aplicación en el diseño de alas de avión y álabes de cierto tipo de turbinas.

En resumen, la forma de las ecuaciones de Resistencia y Sustentación, es la misma para problemas tan disímiles como el diseño de alas de avión y la sedimentación de partículas en fluidos viscosos. La diferencia se encuentra en la investigación de los coeficientes C_d y C_r los que resultan obviamente absolutamente distintos.

3.2.2.- EL NÚMERO DE REYNOLDS EN LA ECUACIÓN DE DARCY-WEISBACH DE APLICACIÓN AL CÁLCULO DE CONDUCCIONES UNIDIMENSIONALES EN RÉGIMEN PERMANENTE Y UNIFORME

En los escurrimientos el problema fundamental es relacionar las pérdidas de energía con las características geométricas e hidráulicas de los mismos.

En base a numerosas experiencias realizadas se sabe que la energía perdida en el tramo Δl_{i-j} , que se denominará ΔJ_{i-j} , cumple con ser:

- a) Proporcional a Δl_{i-j} .
- b) Aproximadamente proporcional a $1/D$.
- c) Aproximadamente proporcional a $U^2/2g$.
- d) Función de μ y de ρ .
- e) Función de la naturaleza de las paredes de la conducción.

Considerando que cuando una magnitud es proporcional a varias variables, lo es también a su producto, se puede entonces escribir la expresión que sigue:

$$\Delta J_{i-j} = cte \Delta l_{i-j} \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} \phi(\text{mat.paredes}; D; U)$$

En la función ϕ aparecen como variables, además de la naturaleza de las paredes, el diámetro D y la velocidad media U . Esto se debe a que ΔJ es sólo aproximadamente proporcional a U^2 y a $1/D$, lo que se corrige con la nombrada función.

Si en la anterior se procede a considerar:

$$f = \text{Cte. } \phi (\text{mat.paredes}; D; U)$$

Reemplazando se obtiene finalmente la expresión de Darcy-Weisbach:

$$\Delta J_{i-j} = f \frac{\Delta l_{i-j}}{D} \frac{U^2}{2g}$$

o teniendo en cuenta que
$$j^* = \frac{\Delta J_{i-j}}{\Delta l_{i-j}}$$

la anterior resulta:
$$j^* = \frac{f}{D} \frac{U^2}{2g}$$

La moderna teoría racional del escurrimiento de fluidos centra como variable fundamental para la determinación del coeficiente de fricción f precisamente al número de Reynolds.

En el proceso de cálculo, en los capítulos correspondientes al mismo se desarrolla el tema en profundidad, puesto que el objetivo de su presentación suscita en el presente texto, es el de adelantar la importancia del número de Reynolds como variable de cálculo en el cálculo de conducciones hidráulicas.

En la Figura 5 se esquematiza la configuración del diagrama de ROUSE al representar en él las ecuaciones del criterio racional.

El gráfico se completa con los ejes logarítmicos de los números de Reynolds (Re) y la fricción (f) dando las curvas en las formas indicadas en la figura:

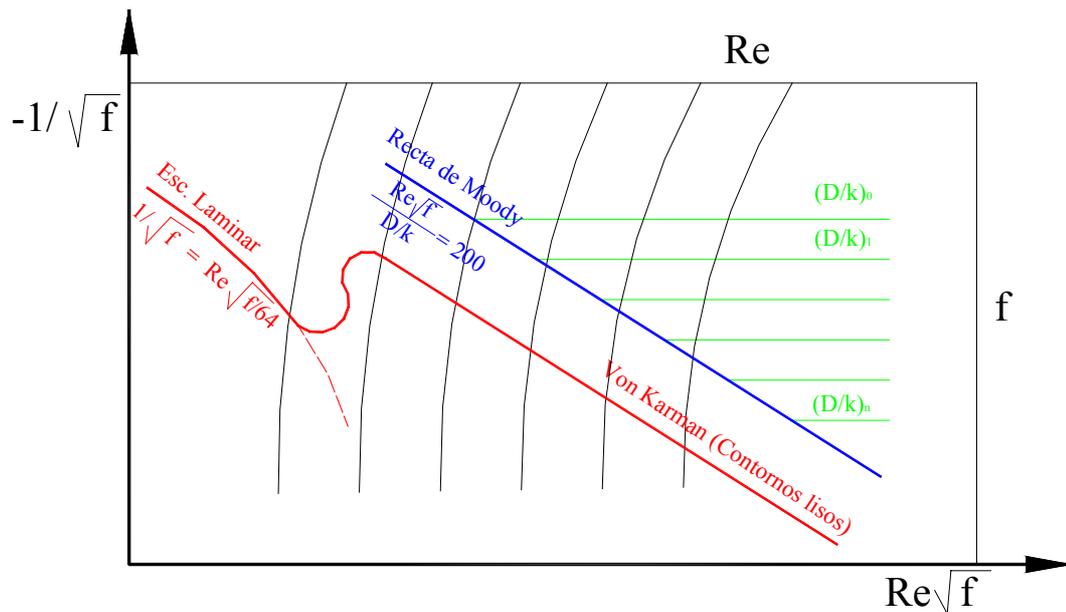
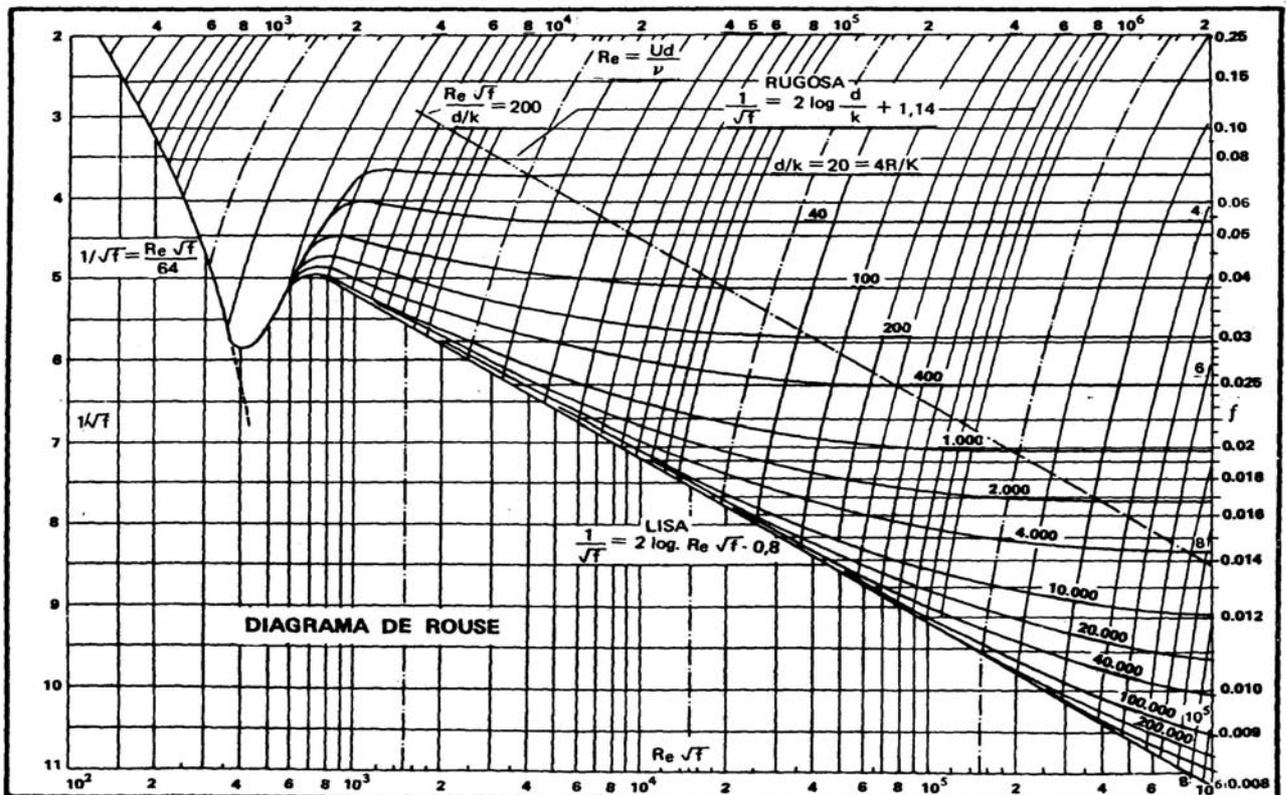


Figura 5
Representación de las ecuaciones

Finalmente, brindamos el gráfico de Rouse completo, el que además de resumir la moderna teoría hidrodinámica posibilita el cálculo de conducciones con un criterio racional y teniendo en cuenta incluso variaciones de temperatura (a través del número de Reynolds) que no posibilitan las expresiones empíricas.

La importancia del número de Reynolds en el cálculo de conducciones, utilizando el moderno criterio racional, queda evidentemente expuesta.



3.3.- APLICACIONES USUALES DEL NÚMERO DE FROUDE EN LA HIDRÁULICA

Se procede a hacer un listado de sus aplicaciones puesto que éstas son frondosas y sumamente abarcativas. El objeto del presente texto es presentar al Número de Froude y las aplicaciones del mismo en temas de interés para la Ingeniería Sanitaria solamente, aunque el listado que sigue excede a las aplicaciones dentro de la misma.

- Aplicación en regímenes permanentes, uniformes y variados en canales, importante para la evaluación de remansos y la clasificación de resaltos (se cuenta en nuestro país con una importante investigación del Laboratorio de Hidráulica del INA al respecto).
- Amplia aplicación en la modelación hidráulica física, es decir en los Laboratorios de Hidráulica (la inmensa mayoría de los modelos son basados en la igualdad del número de Fraude para Modelo y Prototipo).
- Amplia aplicación en Hidráulica fluvial.
- Amplia aplicación en la Teoría y Selección de Máquinas Hidráulicas (Bombas y Turbinas).

Nota: Es fundamental en la deducción de los números específicos utilizados para la clasificación y selección de bombas y turbinas. El tema se desarrolla en "Selección de bombas".