

LA EXPRESIÓN DE BERNOULLI PARA EL ESCURRIMIENTO DE FLUIDOS REALES

1- GENERALIDADES

Son los objetivos del presente artículo, brindar la interpretación de la tan conocida Expresión de Bernoulli, en su adecuación a la Hidráulica de las Conducciones a Presión, y sobre todo, destacar las simplificaciones de la interpretación de referencia, en relación con otras aplicaciones tecnológicas más complejas, como por ejemplo, las que tienen lugar en conducciones de gases compresibles.

Las características del **escurrimiento de agua en las tuberías, sobre todo en lo relacionado con la constancia** (en términos prácticos) **de su densidad o masa específica, y la magnitud poco relevante de la componente de la energía cinética en el total de la energía disponible de sección en sección**, constituyen propiedades que posibilitan una interpretación tecnológica sumamente facilitada en relación con el escurrimiento de otros fluidos en general y de gases en particular.

Si bien, es una ecuación sumamente conocida y de aplicación cotidiana, tal vez y justamente por esa razón, muchos de sus usuarios no se han percatado de algunos conceptos particulares de su uso en la Hidráulica, que son dignos de destacar.

Se adelanta que los conceptos de referencia tendrán que ver con; la particularidad que implica la ya mencionada **constancia del peso específico, la diferencia entre “Pérdida de Energía” y “Pérdida de Carga”**, y la explicación del ... ¿por qué?... usamos en los cálculos de conducciones a presión para muchas aplicaciones, la **línea piezométrica, en lugar de la línea de energía** (lo que sería mucho más correcto desde el punto de vista estrictamente teórico).

Justamente, el pasar de la rigurosidad de la Teoría, a las simplificaciones de la práctica, pero conservando siempre el nivel de aproximación tecnológica requerido por la buena práctica ingenieril, es el objetivo central del breve texto que sigue.

La ecuación general del escurrimiento de los Fluidos es la de Navier - Stokes, la que representa el equilibrio dinámico de una partícula fluida en su movimiento a lo largo de la trayectoria. Su integración para el Régimen Permanente o Estacionario (independiente del tiempo) en escurrimiento unidimensional (Caracterizado por la velocidad media en cada sección de un “tubo de corriente”) para líquido incompresible y viscoso (real), nos lleva a la ecuación de Bernoulli, que se escribe para dos secciones 1-1 y 2-2 del tubo de corriente de referencia:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta J^*_{1-2}$$

En la que:

- Los términos Z son las “alturas” de posición con respecto a un plano horizontal arbitrario
- Los términos $\frac{P_i}{\gamma}$ son las presiones en “metros de columna de agua”, en la que p_i es la presión en la sección i y γ es el Peso específico del líquido (constante).

- Los términos $\frac{U_i^2}{2g}$ son las energías cinéticas en metros
- U_i es la velocidad media en la sección
- ΔJ_i^* es la “Pérdida de Energía Hidráulica por Frotamiento” en el tramo Δl_{ij}

Los términos de la ecuación implican en realidad “Potencia Unitaria”, lo que se desprende fácilmente al seguirse el proceso deductivo de la ecuación, el que obviamente no reproduciremos en el presente artículo. Ello no obstante, se demuestra el concepto expuesto fácilmente, al considerar que los términos de la expresión **implican “Potencia por unidad de peso y de caudal que escurre**. En efecto, si a la altura (evidentemente medida en metros) representada por la suma de los términos de la expresión se la multiplica por el Peso específico γ y por el caudal que realmente escurre Q , dimensionalmente se obtiene la dimensión de la Potencia.

En efecto:

$$\gamma \left(\frac{F}{L^3} \right) \cdot Q \left(\frac{L^3}{T} \right) \cdot H (L) = \gamma Q H \left(\frac{F L}{T} \right)$$

Nota: F, L y T, representan respectivamente dimensiones de Fuerza, Longitud (alturas) y tiempo.

Al ser aplicable la ecuación solo para “**Regímenes permanentes**”, es decir independientes del tiempo, fácil es inferir, que la anterior puede ser interpretada como “Energía unitaria en el tiempo”. Para ello basta multiplicar por 1 segundo ambos miembros, para interpretar el concepto, el que también puede obtenerse multiplicando ambos miembros por un mismo valor arbitrario de tiempo, el que al ser simplificado brinda el valor unitario aludido.

Por todo lo expuesto, los segmentos que representan los términos de la expresión de Bernoulli, se interpretan como la “Energía Unitaria” y de ahora en más, simplemente y en términos de la práctica “la energía”.

La constancia de la suma de los términos de la ecuación que nos ocupa, no es más que la forma de interpretar el Principio de la Conservación de la Energía, para el escurrimiento permanente y unidimensional de un fluido real (prácticamente incompresible y viscoso). Evidentemente el escurrimiento del agua cumple perfectamente con todas éstas precisiones.

Se destaca que las presiones consideradas en la expresión son “relativas, es decir que no consideran a la presión atmosférica. Resulta evidente que cuando las aplicaciones implican la presencia de la misma en ambos miembros de la ecuación de referencia, puede ser simplificada y por lo tanto ignorada.

En cambio en las aplicaciones donde interesa evaluar la depresión y sus consecuencias (es decir la problemática derivada de valores de presión del líquido menores que los de la presión atmosférica) inexorablemente, los planteos deben ser realizados en “presiones absolutas”, considerando la presión atmosférica como referencia, la que deberá estar, consecuentemente, representada en uno de los términos de la ecuación.

Una aplicación importante de la expresión de Bernoulli en términos absolutos lo constituye el estudio de la tubería de aspiración en bombas, que lleva al concepto de “Altura Neta Positiva de Aspiración”, y que será tratado en el número siguiente.

2- APLICACIÓN AL ESCURRIMIENTO A PRESIÓN PERMANENTE Y VARIADO GRADUALMENTE

Con la figura siguiente se evalúa, a la vez que se interpreta físicamente, la expresión para un caso hipotético de una conducción de D variable (disminuyendo en el sentido del eje) e inclinada para mayor generalidad, con lo que los Z_i resultan también variables.

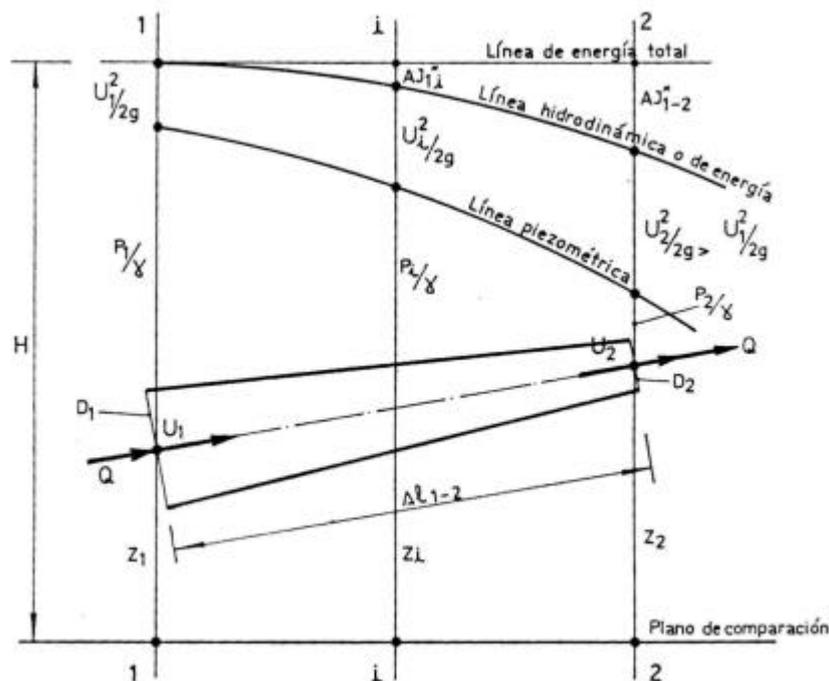


Figura 1

Interpretación de la Ecuación de Bernoulli para el escurrimiento permanente y variado

A la línea que se obtiene de deducir de la energía total el término ΔJ^* , se la denomina “**Línea hidrodinámica**” y brinda en cada sección la **energía hidráulica remanente** del fluido que escurre, en relación con el plano arbitrario de referencia elegido. Si además se descuenta el valor $U^2/2g$ obtenemos la “**línea piezométrica**”, la que brinda la energía potencial del líquido en cada sección, siempre con respecto al plano arbitrario de comparación.

La variación de ΔJ^* , tiene lugar con el cuadrado de la velocidad media, según prueba la teoría y la experiencia.

Nota: Es por todos conocido que el origen de las pérdidas por frotamiento tiene su razón en la rugosidad de los contornos y en el espesor de la capa límite o en ambos efectos simultáneos cuando el espesor de referencia no supera a la rugosidad. Recordamos que en éstos dos últimos casos, los esfuerzos cortantes producidos por la necesaria variación de velocidades entre los distintos estratos, en la transición desde los valores de la subcapa laminar y la velocidad del régimen en la sección, son los causantes de la resistencia en consideración, la que en escurrimientos turbulentos se concentra en las inmediaciones de los contornos.

La variación de U surge de la ecuación de continuidad y resulta evidente que, al disminuir la sección, aumentará el término $U^2/2g$. De la Figura surgen los valores Z_1 y P_1/γ y el concepto simbolizado por el teorema de Bernoulli, dado por la expresión:

$$H = Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta J_{1-2}^* = Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} + \Delta J_{i-j}^* = \text{cte}$$

De la anterior se deduce que, la energía total H se mantiene constante aunque la suma de los términos que la componen resultan variables de sección a sección.

La figura y las ecuaciones anteriores, sirven para definir las líneas de “energía” y “piezométrica”, a la vez que para interpretar el “Principio de la Conservación de la Energía”, para el caso del escurrimiento de líquidos a presión, con una destacable sencillez.

En efecto, la igualdad de los segmentos que constituyen la energía total, en una u otra sección, implican la interpretación del principio en una forma gráfica y evidente.

En particular, el término de presión merece ser destacado por el hecho de que al ser prácticamente **el Peso Específico g constante**, la presión puede ser expresada por la altura líquida, es decir que los que trabajamos en la Hidráulica e las Conducciones, contamos con el privilegio de “**Ver**” **las presiones**, y además poder **evaluar su intensidad**, simplemente por **la altura líquida que representa**. Lo que surge muy claramente, al despejar h de la expresión fundamental de la Hidrostática ($p = \gamma h$).

APLICACIÓN AL ESCURRIMIENTO UNIFORME

Cuando el régimen es permanente y el diámetro constante en el recorrido, el escurrimiento se denomina uniforme.

En la Figura 2 lo esquematizamos para una conducción inclinada para obtener así mayor generalidad.

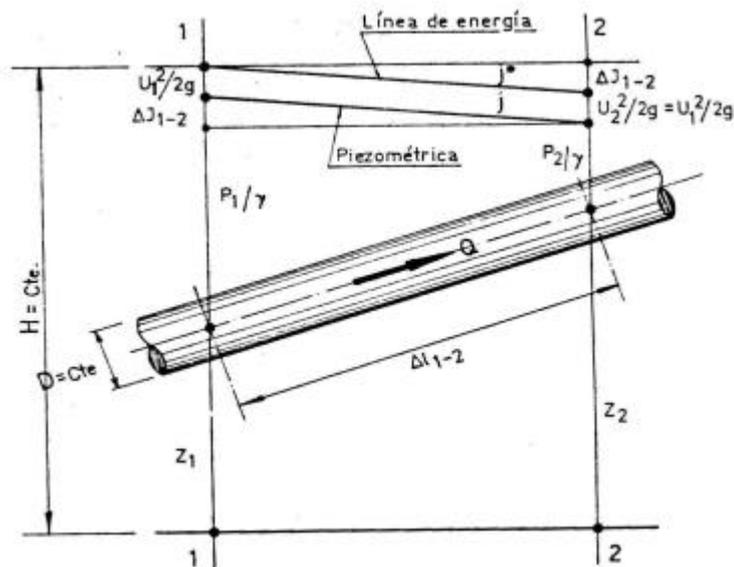


Figura 2
Escorrimento Uniforme

Destacamos que, al no variar el diámetro, ni la rugosidad del material, la velocidad media permanece constante y, en consecuencia ΔJ^* habrá de variar linealmente y la piezométrica se encontrará a una distancia $U^2/2g = \text{cte}$ de la línea de energía, es decir que se dispondrá paralelamente a la misma.

Al variar linealmente ΔJ^* podemos escribir que la “pérdida unitaria de energía” será aquella que se obtenga de dividir ΔJ^* por la longitud Δl_{1-2} del tramo. En efecto

$$j^* = \frac{\Delta J^*_{1-2}}{\Delta l_{1-2}}$$

De donde:

$$\Delta J^*_{1-2} = j^* \Delta l_{1-2}$$

Nótese que si trazamos una horizontal desde la piezométrica en la sección 2-2, delimitamos en la sección 1-1 un segmento ΔJ_{1-2} que resulta igual a ΔJ^*_{1-2} . Por lo que podemos definir un valor:

$$j = \frac{\Delta J_{1-2}}{\Delta l_{1-2}}$$

A ΔJ_{1-2} se la define como “pérdida de carga” y a “j” como “pérdida de carga unitaria”.

Tal designación se debe a que las alturas piezométricas implican **las alturas reales a que llega el líquido**, también conocidas en el lenguaje práctico de la hidráulica como “carga” o “carga hidráulica”.

En general, para los cálculos comunes de la práctica (Acueductos, redes) es bastante común hablar de “**piezométrica**” y no de “línea de energía hidrodinámica”. La razón es la siguiente:

En magnitud, los términos $z + p/\gamma$ son muchísimo mayores que $U^2/2g$. En efecto, considerando una velocidad unitaria (es un orden de magnitud adecuado en la práctica de las conducciones de agua a presión), se tiene:

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{1}{2 \times 9,81} = 0,051 \text{ m}$$

Evidentemente, son unos pocos centímetros frente a los muchos metros que implican las sumas $(Z + P/\gamma)$, razón por la cual, en las representaciones gráficas, la línea de energía virtualmente se confunde con la piezométrica. **Consecuentemente, en las aplicaciones prácticas del cálculo de conducciones a presión, se habla siempre de “línea piezométrica”, ignorándose por completo la línea de energía.**

La línea piezométrica representa **el lugar geométrico de los niveles, para cada sección, a los que llegaría el agua en tubos justamente llamados piezómetros** (ver Figura 3). En consecuencia el nivel indicado por la línea piezométrica representa la altura o “carga” de agua. Esto justifica la denominación práctica de “pérdida de carga unitaria” al decrecer ésta en forma continua y lineal en el recorrido.

En lo sucesivo, esta “pérdida” se designará con el símbolo “j” y se ha de tener en cuenta que, multiplicada por la longitud del tramo $\Delta l_{i,j}$, dará la “pérdida de carga” en el tramo ij. En el régimen uniforme se cumple siempre que $j = j^*$.

El hecho de que ambas líneas, “de energía” y “piezométrica”, prácticamente son coincidentes, posibilita también evaluar la energía total, en forma muy aproximada y con criterio de aproximación tecnológica con la última, cometiendo un pequeño error en defecto, perfectamente admisible en las aplicaciones comunes.

En resumen, en el cálculo de conducciones en general y cuando no se requieran precisiones, se evalúa la piezométrica y no se considera la línea de energía, reservando su uso, para cálculos o estudios más sofisticados, donde interesa la sutileza de su diferenciación (por ejemplo el estudio de tuberías de aspiración en bombas y turbinas).

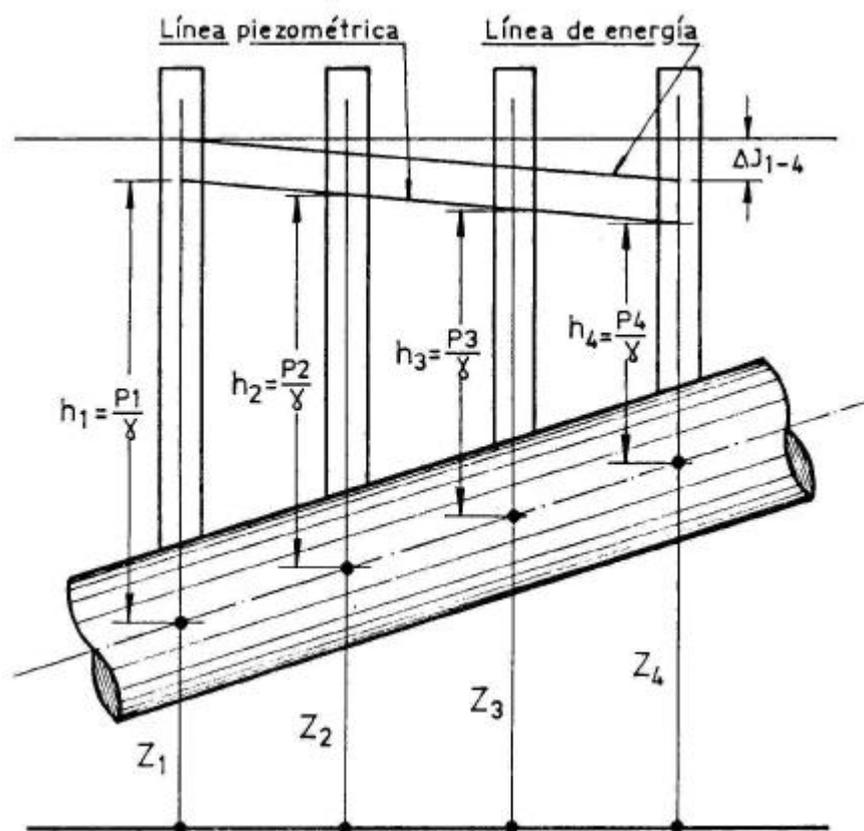


Figura 3
Niveles Piezométricos

Resumiendo lo expuesto, se deduce lo siguiente

- Los términos de la expresión de Bernoulli interpretan el principio de la conservación de la energía.
- Sus valores son “unitarios”, para pasarlos a la “Potencia” deberán ser multiplicados por el “Peso Específico” y por el “Caudal”.
- Al ser aplicable solamente al “régimen permanente” interpreta la energía del escurrimiento y su conservación, puesto que puede ser considerada aplicada en el tiempo unitario (basta con multiplicar por un segundo o por una unidad de tiempo) para que dimensionalmente sus términos representen energía.

- d) La Incompresibilidad del agua (en términos de aplicación tecnológica) permite medir las presiones en metros e interpretarlas y consecuentemente “verlas” como “Alturas de Agua”.
- e) Los relativamente bajos valores del término de energía cinética en conducciones de agua a presión, permiten despreciar el valor de la misma frente la resto de las energías y en especial de los términos de presión.
- f) Consecuentemente la línea Piezométrica, que presenta la gran ventaja de resultar “visible” o “materializable”, puede interpretar a la energía puesta en juego con error pequeño y admisible en las interpretaciones tecnológicas.
- g) De los conceptos expuestos surge una metodología de cálculo sumamente simple y de gran aplicación en el cálculo usual de Acueductos y Redes a Presión.
- h) La “pérdida de carga”, que resulta “visible” o “materializable” como “Pérdida de Altura Piezométrica”, representa adecuadamente la “Pérdida de Energía Hidráulica por frotamiento”.
- i) La “Pérdida de Carga” dividida por la longitud del tramo en consideración, es la denominada “Perdida de Carga Unitaria”.