UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA

CÁTEDRA DE "HIDRÁULICA GENERAL" (69.01)

ECUACIONES DE CONTINUIDAD

Ing. Luis E. Pérez Farrás

Edición: Ing. Andrea Bonafine

- Julio 2002 -

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ingeniería
Departamento de Hidráulica

ECUACIONES DE CONTINUIDAD

INDICE

ECUACIONES DE CONTINUIDAD

1- GENERALIDADES

Estudiaremos las ecuaciones de continuidad, las que se obtienen del Principio de la Conservación de la Masa aplicada al escurrimiento de fluidos, a través de un “volumen de control”.

En efecto, considerando un volumen arbitrario, fijo en el espacio e inmerso en un medio continuo en movimiento que lo ocupa en cada punto y en todo instante (tal como se esquematiza en la Figura 1) es evidente que; el balance entre la masa entrante y saliente a través de la superficie del mismo y en un instante dado, más la variación de la masa en su interior y con la variable tiempo tendiendo a cero, da inexorablemente una masa resultante nula, puesto que ésta no puede crearse ni desaparecer.

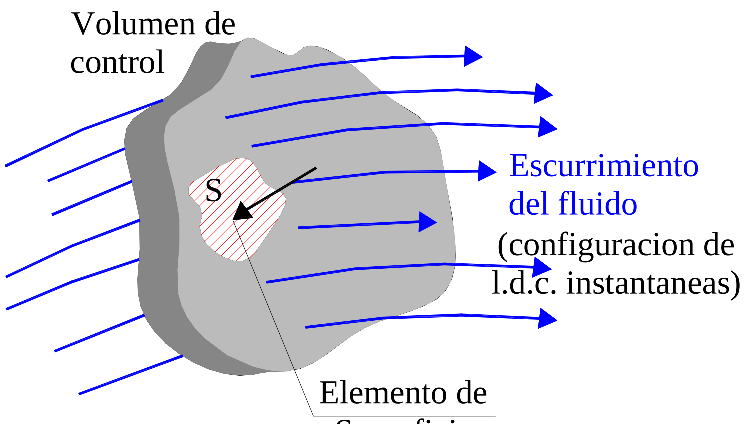

Figura 1
Volumen de control

El principio enunciado se resume simbólica y escuetamente como:

$$(m_s - m_e) + \Delta m_i = 0$$

En la expresión anterior m simboliza la masa y los subíndices indican, "saliente", "entrante" e “interior”.

Obviamente, el símbolo Δ implica la "variación" de la masa en el tiempo, y es la diferencia entre masa final y masa inicial en el tiempo elemental considerado.

Al escribir la expresión, despejando el paréntesis que implica el balance de masa a través de la superficie lateral, la interpretación del principio de la masa puede interpretarse en forma más directa, puesto que el balance entre masa entrante y saliente por la superficie de control, es compensado por la variación de la masa en el interior del volumen de control. En símbolos:

$$(m_s - m_e) = -\Delta m_i$$

Las ecuaciones a obtener dependen de la forma del Volumen de control adoptada. Si ésta es el cubo elemental de lados diferenciales, se obtiene la Ecuación Diferencial de Continuidad en un Punto, en cambio si el volumen de control elegido es el Tubo de corriente, la que se obtiene es la Ecuación Diferencial de Continuidad en el mismo, de suma utilidad para la consideración de los Escurrimientos Unidimensionales.

2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD EN UN PUNTO

Es la que se obtiene, al considerar como volumen de control al elemento diferencial de lados dx, dy y dz.

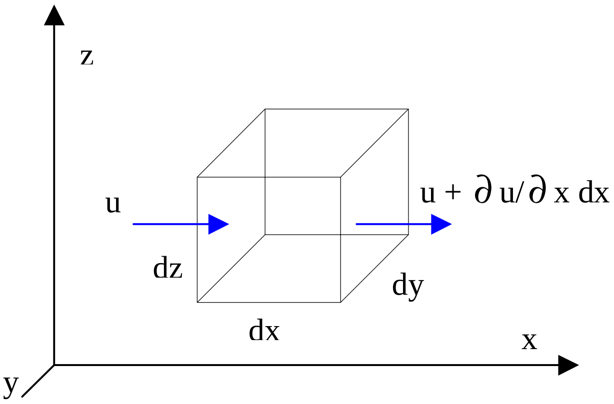

Figura 2
Volumen de control: elemento diferencial

Consecuentemente para obtener la ecuación buscada, se considera el cubo de lados diferenciales dx, dy, dz, es decir el punto material (ver Figura 2) fijo en el espacio cartesiano

Para las tres coordenadas z; y; x; desarrollaremos el paréntesis que implica el "balance total de masa en un instante dado".

La masa entrante según el eje x resulta de multiplicar el "caudal de masa" según x por dt, en efecto:

$$dq_m = \rho\, dq = \rho u\, dx\, dy\, dt = m_{ex}$$

La masa saliente resulta:

$$m_{sx} = m_{ex} + \frac{\partial}{\partial x}(m_{ex})dx$$

Es decir:

$$\rho u\ dx\ dy\ dt + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\ dx\ dy\ dt\ )dx$$

El balance o diferencia entre masa saliente y masa entrante resulta:

$$m_{sx} - m_{ex} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz dt)dx$$

Extrapolando el mismo procedimiento a los ejes y, z, se tiene:

$$m_{sy} - m_{ey} = \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dz dx dt)dy$$

$$m_{sz} - m_{ez} = \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\, dx dy dt)dz$$

Por lo que, el balance total en un instante dado, es decir la diferencia $\left(m_s - m_e\right)$ será:

$$m_s - m_e = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u dy dz dt\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v dx dz dt\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \omega dx dy dt\right)dz$$

Para evaluar la variación de la masa en el tiempo, se tiene que:

$$\Delta m_i = \left[\rho dx dy dz + \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho dx dy dz\right]dt\right] - \rho dx dy dz$$

por lo que:

$$\Delta m_i = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho dx dy dz\right)dt$$

Sumando ahora e igualando a 0, con el propósito de obtener la ecuación resultante del principio de la conservación de la masa aplicada al volumen elemental de lados dx, dy, dz, y eliminando además los diferenciales comunes, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \omega\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La que escrita en notación vectorial resulta:

$$\mathrm{div}\left(\rho V\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Si se considera ρ=cte. en el espacio y el tiempo, la anterior se reduce a:

$$\mathrm{div}\, V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Que es la ecuación de continuidad para la masa específica considerada como constante, es decir que su cumplimiento, implica de por sí, una "Condición de Incompresibilidad".

Nota: es de destacar que la condición anterior, sumada a la imposición de “Rotor Nulo” (escurrimiento irrotacional) da lugar al modelo matemático conocido como “Red de escurrimiento” la que posibilita conocer el vector velocidad en cada punto de un escurrimiento unidimensional. El tema se retomará en el Capitulo correspondiente.

3- ECUACIÓN DE CONTINUIDAD EN EL TUBO DE CORRIENTE

Es la que se obtiene, cuando el volumen de control es el “Tubo de Corriente” (ver Figura 3) es decir cuando el escurrimiento es Unidimensional, caso que cubre el vasto campo de aplicación de las Conducciones a Presión y a Superficie Libre (Canales).

3.1- PARA CAUDAL DE MASA CONSTANTE EN EL TIEMPO

A continuación se realizará la deducción, en forma similar a la anterior, y destacando que por ser el tubo de corriente impermeable (por definición no puede admitir velocidades normales) el balance de masas entrante y saliente solo tendrá lugar entre las secciones de inicio y final, caracterizadas, por los subíndices 1 y 2 respectivamente.

A éste tipo de escurrimiento, cuando la variación de la masa es nula en el tiempo y variable en el recorrido, se lo denomina “semipermanente”

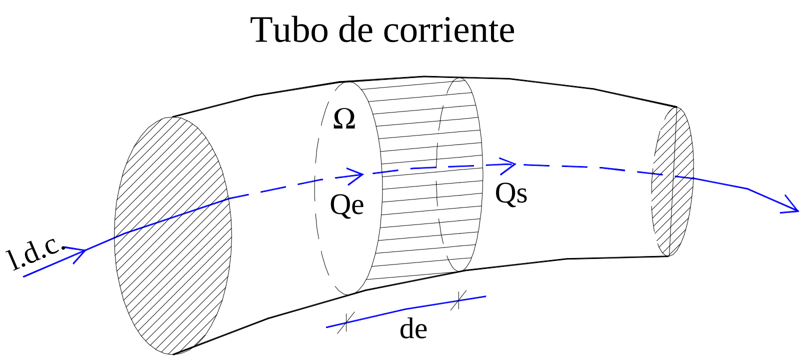

Figura 3
Tubo de corriente

Con estas consideraciones se obtendrá la Ecuación de Continuidad, en la forma de mayor uso en las aplicaciones que constituyen los objetivos fundamentales de nuestra asignatura.

El desarrollo consiste en elaborar la expresión que sintetiza la interpretación del Principio de Conservación de la Masa, aplicado ahora al volumen de control “Tubo de corriente” y teniendo en cuenta la variación del mismo en el tiempo, como consecuencia de la variación de masa en el recorrido.

$$\left(m_s - m_e\right) + \Delta m_i = 0$$

El proceso es análogo al anterior, pero simplificado dado que ahora el espacio está expresado en una sola coordenada l, puesto que como es lo habitual y obligado en conducciones unidimensionales, el sistema de referencia adoptado es la terna intrínseca. La velocidad U es la definida como “Velocidad media en la sección, según se analizó oportunamente en Cinemática.

Considerado el elemento diferencial dl del tubo de corriente, se tiene que la masa entrante resulta de multiplicar el Caudal de masa entrante por el tiempo diferencial dt, en efecto:

$$m_e = \rho\ Q\ dt\ = \rho\ U\Omega\ dt$$

La masa saliente, resulta de sumar a la anterior, su variación en el espacio dl, es decir:

$$m_s = \rho\ U\Omega\ dt + \frac{\partial}{\partial l}(\rho\ U\Omega\ dt)dl$$

Por lo que el balance entre Masa Saliente y Masa Entrante, resulta:

$$m_s - m_e = \frac{\partial}{\partial l}(\rho\ U\Omega\ dt)dl$$

Para completar la ecuación, se debe considerar ahora la variación en el tiempo, de la masa contenida dentro del volumen de control. La masa inicial es:

$$m_i = \rho\ \Omega\ dl$$

La masa final, luego de un instante dt, es:

$$m_f = \rho\ \Omega\ dl + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\ \Omega\ dl)\ dt$$

La diferencia entre masa final y masa inicial resulta, en consecuencia

$$\Delta m_i = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\ \Omega\, dl)\ dt$$

Para obtener la expresión final, sólo resta concretar la suma entre el balance da masa entrante y saliente y la variación de masa en el interior del volumen de control (tubo de corriente en éste caso) lo que resulta:

$$\frac{\partial}{\partial l}(\rho\ U\Omega\ dt)dl + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\ \Omega\, dl)\ dt = 0$$

Dividiendo por los diferenciales comunes, finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial l}(\rho\ U\Omega) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\ \Omega) = 0$$

La anterior constituye la Ecuación diferencial de continuidad, para Escurrimientos Unidimensionales (en tubo de corriente) en la que el Caudal de Masa Entrante no varía con el tiempo.

Su aplicación es trascendente en la problemática de escurrimientos impermanentes (transitorios) tanto en conducciones a presión como a superficie libre.

Nota: En particular, en el desarrollo de nuestra asignatura, será convenientemente aplicada y elaborada, para desarrollar la "Segunda Ecuación de Saint Venant", la que en conjunto con la primera (que también será oportunamente deducida) posibilitan el encare del estudio y cálculo de los Escurrimientos Impermanentes a Presión (un caso particular del mismo, de gran importancia en la Hidráulica de las Conducciones a Presión, es el denominado y temido "Golpe de Ariete").

La Ecuación diferencial de Continuidad, para $\rho = cte$ en el espacio y el tiempo, se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{l}}\left(\mathrm{U}\,\Omega\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\Omega\right) = 0$$

Para el régimen permanente y desde que el primer paréntesis es el caudal que atraviesa la sección, la anterior se reduce a:

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{l}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{l}}\left(\mathrm{U}\ \Omega\right) = 0$$

En consecuencia:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{U}\ \Omega = \mathrm{cte}$$

La anterior es la expresión de la Ecuación de Continuidad para Escurrimiento permanente, Unidimensional (en tubo de corriente) de un fluido Incompresible.

Constituye una ecuación de vital importancia en el Diseño y Cálculo de Conducciones a presión, a Superficie libre (canales) y en general para la Hidráulica unidimensional del régimen permanente.

Nota: Incluso, forma parte fundamental de la metodología de cálculo aplicable a escurrimientos bidimensionales, precisamente en el tema "Red de Escurrimiento". En efecto, entre cada par de líneas de corriente de la red, se establece un escurrimiento en "tubo de corriente bidimensional" en el que es válida la ecuación de referencia. El tema se estudiará específicamente en el capítulo relativo a "Red de Escurrimiento" pero se adelanta que la Ecuación de Continuidad posibilita su uso.

3.2- PARA CAUDAL DE MASA VARIABLE EN EL TIEMPO Y EL RECORRIDO

En este caso, conocido también como de Impermanencia Total, la ecuación cuenta con un sumando más, y tal como puede obtenerse del texto de la materia “Fundamentos”, la deducción para ese caso lleva a la ecuación más general

$$\frac{\partial}{\partial l}(\rho\, U \Omega) + \frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, U \Omega) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, \Omega) = 0$$

Es de destacar que, de considerar que el caudal no varía con el tiempo y sólo lo hace con el espacio, el segundo sumando resulta nulo, obteniéndose la ecuación anterior que, obviamente, es un caso particular de esta última.

Se remite al alumno a su lectura y seguimiento de la deducción, sin que sea necesario memorizar la misma (a pesar que no es dificultosa).

La deducción será exigida para las dos formas precedentes de la ecuación de Continuidad, las que se obtienen de forma totalmente análoga, las que son de aplicación inmediata, no solo en la materia, sino que también, en muchísimos temas de la Especialidad Hidráulica.