

LA ECUACIÓN GENERAL DE NAVIER - STOKES EN LA ENSEÑANZA DE HIDRÁULICA GENERAL

AUTOR: Ing. LUIS PÉREZ FARRÁS

**Cátedra de Hidráulica General de la FIUBA
Profesor Asociado a Cargo**

**DIRECCIÓN: L. M. Drago 2051- Villa Adelina - C.P. 1607
Pdo. de San Isidro- Prov. de Buenos Aires
Tel.: (01) 765- 1341/ Fax:(01) 735-6386
e-mail: lepf@inea.com.ar**

INDICE

RESUMEN	1
1. GENERALIDADES Y OBJETIVOS	2
2. ENSEÑANZA DE LA ECUACION DE NAVIER STOKES EN LA FIUBA	3
3. INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES	5
3.1. CASO DE $\bar{v} = 0$	5
3.2. INTEGRACIÓN PARA ESCURRIMIENTO PERMANENTE DE UN FLUIDO PERFECTO EN RÉGIMEN IRROTACIONAL	6
3.3. INTEGRACIÓN PARA RÉGIMEN PERMANENTE, LÍQUIDO REAL Y TUBO DE CORRIENTE	6
3.4. DEDUCCIÓN DE LA PRIMERA ECUACIÓN DE SAINT VENANT	10
4. CONCLUSIONES	11

RESUMEN

Los planes de estudio cada vez más acotados, la presión de los alumnos por evitar los denominados “temas difíciles”, y en particular en nuestra Facultad, que a partir de la vigencia del plan 1986, la materia pasó de ser anual a cuatrimestral, son hechos que llevan a plantear la posibilidad de eliminar la enseñanza de la ecuación de referencia.

Para ello, surge como natural, plantear los objetivos de la materia sólo como unidimensionales. En ese caso el fundamento teórico queda perfectamente cubierto con el estudio de la “Primer Ecuación de Saint Venant”.

En el presente trabajo se describe el proceso deductivo planteado en el libro de la materia, publicado por el CEI de la FIUBA, basado en la extensión a los fluidos incompresibles de la Teoría del Medio Continuo, la que es fundamento esencial en la formación del Ingeniero Civil.

También se describen las distintas integraciones que, en base a las correspondientes hipótesis simplificativas, permiten obtener muchas de las ecuaciones de uso cotidiano. En particular se detallan las deducciones de las ecuaciones de Saint Venant y la de Bernoulli para fluido real, de una forma compacta y, aunque más breve, igualmente rigurosa con respecto a la del libro de referencia.

El autor y su Profesor Asociado, discutieron el tema y de la misma se deducen las conclusiones que se presentan para la discusión de los docentes, en la comisión respectiva del Congreso.

En apretada síntesis, se estima recomendable la enseñanza de la ecuación que nos ocupa en los casos en que, como el nuestro, la asignatura sea parte de la carrera de Ingeniería Civil, puesto que está íntimamente ligada a la Teoría General del Medio Continuo.

También es recomendable en los casos que se pretenda una gran generalidad, unida a un interesante nivel académico, puesto que, las ecuaciones de la Hidrostática, de Bernoulli en la línea y en el tubo de corriente (para líquido real en este caso) y la misma “Primer ecuación de Saint Venant”, pueden obtenerse de la ecuación de Navier-Stokes.

En cambio, para planes de estudio con criterio eminentemente tecnológico y dirigido a las aplicaciones unidimensionales, y además interesa minimizar la enseñanza de la teoría, es oportuno no considerar la ecuación que motiva el presente trabajo, y basar el fundamento teórico en las ecuaciones de Saint Venant.

1. GENERALIDADES Y OBJETIVOS

Es el objetivo principal del presente trabajo, presentar las conclusiones que obtuvimos luego de un largo y profundo debate mantenido con mi Profesor Asociado, el Ing. Adolfo Guitelman, relativo a la importancia de la ecuación de Navier- Stokes en la enseñanza de la Ingeniería Civil o Hidráulica.

Los objetivos complementarios, son; el de destacar la generalidad de la ecuación (de la que se obtienen muchas de las ecuaciones o “herramientas de trabajo” o de aplicación en la práctica cotidiana) y la íntima relación existente entre los conceptos de base en que se fundamenta la ecuación y la Carrera de Ingeniería Civil.

Las ideas centrales fueron surgiendo con el correr de los años, a partir de apreciar que las bibliografías especializadas, cada vez se refieren menos a las ecuaciones que nos ocupan, priorizando el uso de las ecuaciones de Saint Venant, es decir atacando el problema desde el punto de vista estrictamente unidimensional.

Por otra parte, como las carreras de las especialidades nombradas se encuentran desde hace tiempo en constante reformulación y con tendencia a recortar los años de duración, surge naturalmente la necesidad de acortar los programas de las asignaturas de las carreras de grado.

En nuestra casa de estudios en particular, a partir de la vigencia del plan 1986, que ha convertido en cuatrimestrales a todas las materias, nos encontramos con que la mas larga de la carrera de Ingeniería Civil, que es justamente “Hidráulica General”, debe dictarse en un cuatrimestre con una dedicación de 8 hs. semanales.

Si bien el tiempo asignado es, a mi criterio, suficiente, tal vez el ritmo que impone el seguimiento y la elaboración de los conocimientos impartidos y necesariamente muy eslabonados, hace pensar o percibir en los alumnos, que la materia es excesivamente larga.

Es oportuno destacar que los objetivos centrales de la Materia son; calcular conducciones a presión, a superficie libre, orificios y vertederos y seleccionar bombas y turbinas.

Evidentemente para el logro de los objetivos es necesario el desarrollo previo de la Mecánica del Continuo. Además, en la versión actual se imparten conocimientos sobre redes de escurrimiento e Hidráulica de los medios permeables, que si bien no constituyen los objetivos centrales, se considera deben ser impartidos como complemento imprescindible de los mismos y teniendo en cuenta las necesidades de materias correlativas de Hidráulica General.

La presión ejercida por los alumnos me ha hecho pensar durante mucho tiempo, sobre la necesidad de “alivianar” el programa de la asignatura, para lo que pensé que la misma podría quedar limitada al cumplimiento estricto de los objetivos básicos, por lo que al eliminarse los movimientos bidimensionales, incluidos los de los medios permeables, los escurrimientos a analizar serían solo unidimensionales.

Con éste criterio, no se hace necesario el estudio de las Ecuaciones de Navier Stokes, y puede procederse con la enseñanza de la primera ecuación de Saint Venant directamente, con lo que la enseñanza de la teoría se reduce considerablemente en tiempo y en dificultad, sobre todo al eliminarse el tema “Red de escurrimiento”.

Finalmente, tras meditar sobre el tema, arribé a la conclusión contraria, hasta que un enriquecedor intercambio de opiniones con mi Profesor Asociado, nos llevó a las conclusiones finales, que son las que sometemos a consideración de nuestros colegas profesores, en la parte final del presente trabajo.

2. ENSEÑANZA DE LA ECUACION DE NAVIER STOKES EN LA FIUBA

Siguiendo el programa vigente para la carrera de Ingeniería Civil de la FIUBA, se ha realizado el Libro “Hidráulica-Fundamentos” (Ings. Dante Dalmati- Luis Pérez Farrás) editado por el CEI, el que complementado con otros trabajos constituye la bibliografía básica de la cátedra.

En la Capítulo 4 del mismo, “Dinámica de los Fluidos”, se procede a la deducción de las ecuaciones de Navier y Stokes y a sus integraciones, a partir de las correspondientes hipótesis simplificadoras para cada caso.

La misma no es posible reproducir en éste texto, que debe ser obligatoriamente breve, pero si se brindan los conceptos básicos e introductorios de la deducción, relacionados con el Tensor de Tensiones, que dan sustento a la íntima vinculación de la ecuación de referencia, con concepciones básicas de la Ingeniería Civil.

El proceso deductivo, en apretada síntesis conceptual, se fundamenta en la extrapolación a los fluidos de $\rho = \text{cte}$, de las ecuaciones que vinculan tensiones y deformaciones. Esencialmente se considera el equilibrio del cubo elemental de lados diferenciales, poniéndose de manifiesto las tensiones normales σ , y las tangenciales τ . A continuación se presentan las ecuaciones generales que vinculan los esfuerzos normales y las deformaciones:

$$-\sigma_x + \frac{1}{\nu} (\sigma_y + \sigma_z) = E \varepsilon_x$$

$$-\sigma_y + \frac{1}{\nu} (\sigma_x + \sigma_z) = E \varepsilon_y$$

$$-\sigma_z + \frac{1}{\nu} (\sigma_x + \sigma_y) = E \varepsilon_z$$

Las vinculaciones entre esfuerzos y deformaciones, en general, están dadas por

$$\sigma = E \varepsilon \quad ; \quad \tau = G \gamma$$

En las que:

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, son las tensiones normales según los respectivos ejes.
- ν es el coeficiente de Poisson, que brinda la relación entre las deformaciones en un sentido y la correspondiente al sentido normal, para las distintas sustancias.
- E es el módulo de elasticidad de la sustancia en estudio.
- $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, son los alargamientos porcentuales en el sentido de los ejes indicados por el subíndice correspondiente.

- G es el módulo transversal o de Young [$E=2(1+\nu)G$].
- γ es ángulo de distorsión del ángulo recto original, debido a los esfuerzos cortantes.

Las respectivas ecuaciones son aplicadas a una sustancia de $\nu = 1/2$, es decir un líquido incompresible pero deformable. En efecto, tal sustancia mantiene el volumen constante al ser solicitado, pero con acortamientos en dos ejes, correlacionados con alargamientos en el eje normal a ambos.

Por otra parte, las tensiones normales reciben el nombre de presiones, y en los fluidos la proporcionalidad se establece entre sollicitación y velocidad de deformación, por lo que las ecuaciones equivalentes se transforman en las siguientes:

$$\begin{aligned} -p_x + \frac{1}{\nu}(p_y + p_z) &= E \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \\ -p_y + \frac{1}{\nu}(p_x + p_z) &= E \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} \\ -p_z + \frac{1}{\nu}(p_x + p_y) &= E \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \end{aligned}$$

Las vinculaciones entre esfuerzos y deformaciones están dadas por:

$$p = \phi \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{cte} \quad ; \quad \tau = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

(las que deberán escribirse según las proyecciones en los tres ejes)

$$\phi = 2(1+\nu)\mu \quad ; \quad \text{la que con } \nu = 1/2 \text{ resulta } \phi = 3\mu$$

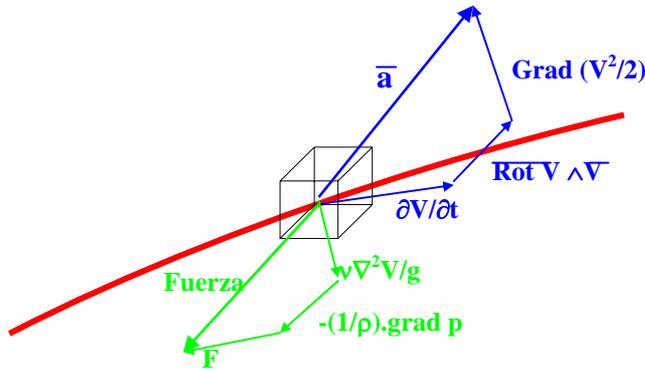
En las que:

- p_x, p_y, p_z , son las presiones normales según los respectivos ejes.
- $\nu=1/2$, es el coeficiente de Poisson para los líquidos.
- E es el módulo de elasticidad de la sustancia en estudio.
- $\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}; \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}; \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}$, son las velocidades de deformación lineal o de alargamientos porcentuales en el sentido de los ejes, indicados por el subíndice correspondiente.
- $\phi=3\mu$ es la relación entre los coeficientes de proporcionalidad entre esfuerzos normales y tangenciales (denominado viscosidad para éste caso).
- $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ es la velocidad de distorsión del ángulo recto original, debido a los esfuerzos cortantes.

La deducción consiste en la elaboración matemática del equilibrio dinámico de la partícula fluida en su movimiento a lo largo de la trayectoria. La partícula en movimiento es el cubo elemental sujeto a las sollicitaciones normales y tangenciales enunciadas y resultantes de la

acción sobre la misma del medio circundante (el mismo fluido). Finalmente la expresión de Navier y Stokes, expresada vectorialmente resulta:

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{V}}{g} = \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \text{rot } \bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{V}} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right)$$



La anterior implica que las fuerzas por unidad de masa, sumadas a las debidas a la presión y a la resistencia viscosa, igualan al vector aceleración, el que presenta a su vez tres componentes, debidas a la impermanencia, la rotacionalidad y la convección del vector velocidad en el espacio.

Figura 1

Equilibrio Dinámico de la Partícula Fluida Real

3. INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

En el presente numeral, se procede a resumir las ecuaciones que se obtienen de las hipótesis simplificativas, brindándose en forma completa las que difieren o no están en el libro de referencia.

3.1. CASO DE $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$

Es el caso del líquido en reposo, es decir la Hidrostática.

La ecuación se reduce a:

$$\bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0$$

Que es la conocida ecuación de Clairaut y nos lleva a la expresión de la Hidrostática

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cte}$$

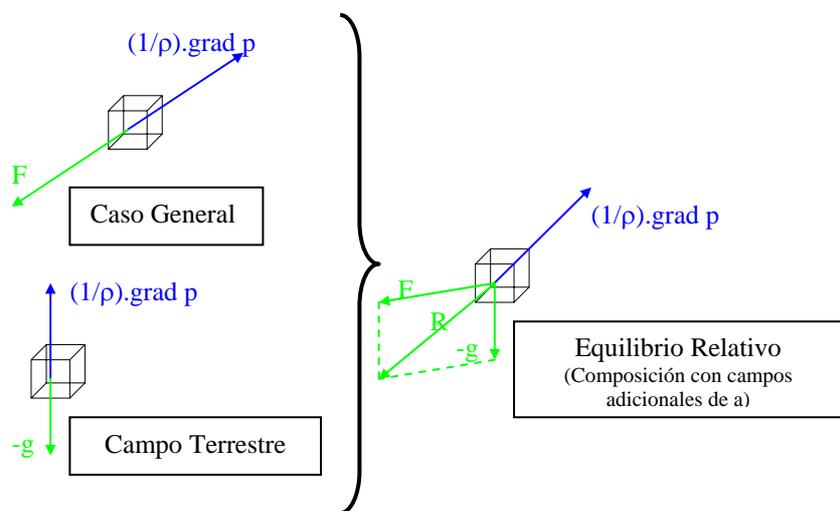
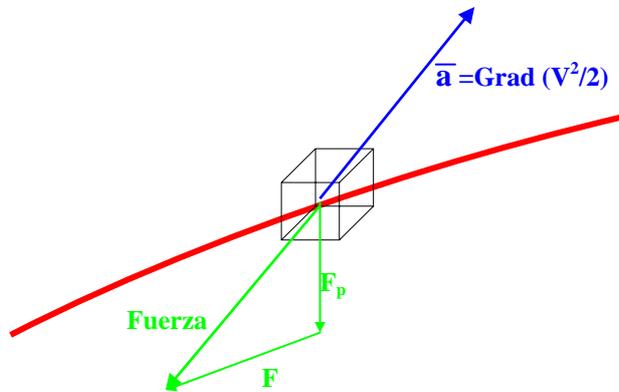


Figura 2

Equilibrio Hidrostático de la Partícula Fluida ($\mathbf{V} = \mathbf{0}$)

3.2. INTEGRACIÓN PARA ESCURRIMIENTO PERMANENTE DE UN FLUIDO PERFECTO EN RÉGIMEN IRROTACIONAL



La ecuación se reduce a:

$$\bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right)$$

Que es la conocida ecuación de Euler y nos lleva a la expresión de Bernoulli para la línea de corriente:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V}{2g} = \text{cte}$$

Figura 3

Equilibrio Dinámico de la Partícula de un Fluido Perfecto

3.3. INTEGRACIÓN PARA RÉGIMEN PERMANENTE, LÍQUIDO REAL Y TUBO DE CORRIENTE

Se procede a realizar la integración puesto que es mucho más reducida que la original en el libro.

Para el análisis que sigue, que implica la integración para movimientos unidimensionales en régimen permanente, resulta más oportuno utilizar coordenadas intrínsecas. Por lo que la ecuación general de Navier- Stokes queda:

$$\begin{aligned} L - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + v \nabla^2 V &= \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{V^2}{2} \right) \\ N - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{V^2}{R} \\ B - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{V^2}{R} \right) &= 0 \end{aligned}$$

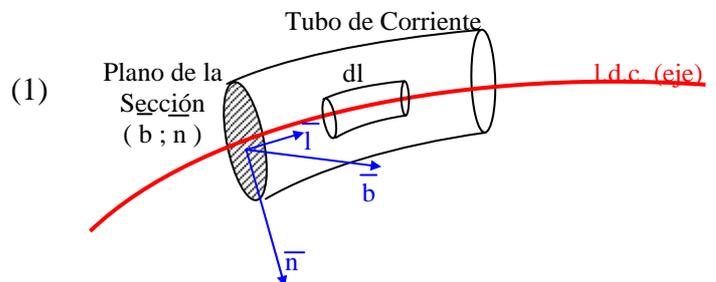


Figura 4

Integración sobre el Tubo de Corriente

Se recuerda que si se tienen en cuenta los cosenos directores, resulta que:

$$L = -g \cos(z;l) = -g \frac{\partial z}{\partial l} ; N = -g \cos(z;n) = -g \frac{\partial z}{\partial n} ; B = -g \cos(z;b) = -g \frac{\partial z}{\partial b}$$

Por lo que reemplazando en las (1) se tiene que:

$$\begin{aligned} -g \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + \nu \nabla^2 V &= \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{V^2}{2} \right) \\ -g \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{V^2}{R} \\ -g \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} &= 0 \end{aligned}$$

Si se divide por g, se multiplica por -1, se igualan las expresiones a 0 y se sacan factor común los operadores de derivación, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} \left[z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right] - \nu \frac{\nabla^2 V}{g} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) &= \frac{V^2}{R} \\ \frac{\partial}{\partial b} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

El propósito es el de integrar las expresiones (2) en el sentido de \bar{l} y de la sección (versores \bar{n} y \bar{b}). Por lo que:

$$\iint_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) d\Omega dl + \iint_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{V^2}{2g} \right) d\Omega dl - \iint_{\Omega_1} \frac{\nu \nabla^2 V}{g} d\Omega dl = \text{cte} \quad (3)$$

Nótese que a cada línea de corriente le corresponde una constante de integración distinta, por lo que para integrar a la anterior recurrimos a un artificio, que consiste en considerar la potencia del escurrimiento en el tubo de corriente. La expresión de la misma resulta de multiplicar los términos de la anterior por V y por γ . En efecto, dimensionalmente se tiene que:

$$[\gamma QH] = \frac{F}{L^3} \frac{L^3}{T} L = FL/T \text{ (Potencia); y, por otra parte, } dQ = V d\Omega$$

Multiplicando por V y γ todos los integrandos de la (3) se obtiene:

$$\iint_{Q_1} \frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \gamma dQ dl + \iint_{Q_1} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \gamma dQ dl - \iint_{Q_1} \frac{\nu \nabla^2 V}{g} \gamma dQ dl = \text{cte} \quad (4)$$

Es de destacar que la anterior se parece mucho a la ecuación previa, con la ventaja que permite su integración en base a los conceptos y artificios que siguen:

a) Solución de la primera integral doble; “Reglas de Bresse”:

En la segunda de las (2) si V es lo suficientemente pequeño (no olvidar que está a la segunda potencia), o si R es muy grande, el cociente V^2/R tiende a 0. Como la tercera ecuación es igual a 0, ello implica que en el plano de la sección la distribución de presiones es “hidrostática, es decir responde a la ecuación:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cte (en la sección)} \tag{5}$$

Las condiciones que implican $V^2/R = 0$, se enuncian como las “Reglas de Bresse”. Estas implican la dependencia de las variables únicamente con la coordenada "l", por lo que:

$$\int_{Q_1} \frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \gamma dQ dl = \int_Q \frac{d}{dl} \int_1 \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \gamma dl dQ = \gamma Q \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \tag{6}$$

Las implicancias tecnológicas de la (6) son muy importantes, en efecto, tal como puede apreciarse en la Figura 5, al ser la suma en cada punto un valor constante, se puede establecer como convención que, para tuberías de relativamente pequeño diámetro frente a las presiones y alturas puestas en juego (casos más comunes de la práctica), los valores z pueden ser establecidos entre el plano arbitrario de comparación adoptado y el eje (o baricentro de la sección), y los valores de presión entre dicho eje y el nivel piezométrico.

La convención equivalente para las secciones de canales, establecería que los valores z_i deberían tomarse entre el plano de comparación y el baricentro de la sección. Pero, evidentemente resulta mucho más práctico establecer los z_i entre dicho plano y la solera del canal, con lo que los valores de la presión (en m de columna de agua) quedan definidos directamente por la profundidad o “tirante hidráulico h ”.

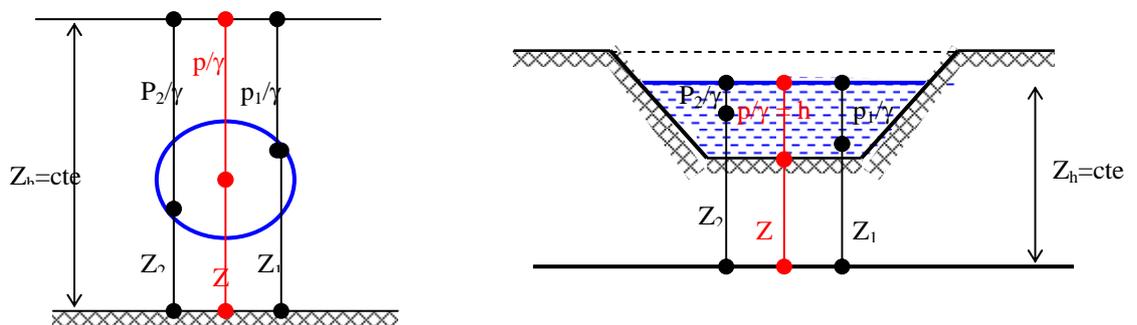


Figura 5

Consecuencias Tecnológicas de las Reglas de Bresse

b) Solución de la segunda integral doble:

Por las reglas de Bresse:

$$\iint_{Q_1} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \gamma dQ dl = \int_Q \frac{d}{dl} \int_1 \left(\frac{V^2}{2g} \right) \gamma dl dQ = \int_Q \frac{V^2}{2g} \gamma dQ$$

Por otro lado, se recurre al artificio de igualar la potencia del escurrimiento real (caracterizado por la variación del valor de V de punto a punto en la sección), con la potencia de la corriente ficticia representada por el valor medio de la velocidad en la sección de referencia. En ese caso resulta:

$$\int_Q \frac{V^2}{2g} \gamma dQ = \alpha \gamma Q \frac{U^2}{2g} \tag{7}$$

En realidad, se traslada la dificultad de la integración al coeficiente α , el que posteriormente se determinará en base a consideraciones experimentales. En efecto, al considerar que, γ es constante, que $Q=U \Omega$ y que $dQ=V d\Omega$, de la (7) se deduce que:

$$\alpha = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left(\frac{V}{U} \right)^3 d\Omega$$

c) Solución de la tercer integral doble

Considerando la complejidad del término que contiene a la Laplaciana de V y la imposibilidad de integrarlo, procedemos a hacer:

$$j^* = - \frac{v \nabla^2 V}{g} \Rightarrow \iint_{Q_1} - \frac{v \nabla^2 V}{g} dQ dl = \iint_{Q_1} \gamma j^* dl dQ = \gamma Q \int_1 j^* dl \tag{8}$$

Sumando las soluciones de las tres integrales dobles, se obtiene:

$$\gamma Q \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \alpha \gamma Q \frac{U^2}{2g} + \gamma Q \int_1 j^* dl = cte$$

Si se considera la “Pérdida de energía entre dos secciones 1 y 2” como:

$$\Delta J_{12}^* = \int_2^1 j^* dl$$

Dividiendo por γQ y escribiendo la expresión para dos secciones 1 y 2, se tiene:

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta J_{12}^*} \tag{9}$$

La (9) constituye la expresión de Bernoulli para el escurrimiento en un tubo de corriente, de un líquido incompresible, viscoso (muy similar al líquido real) en régimen permanente.

3.4. DEDUCCIÓN DE LA PRIMERA ECUACIÓN DE SAINT VENANT

Nuevamente se parte de la ecuación de Navier Stokes en coordenadas intrínsecas, pero considerando ahora también el término de impermanencia.

$$\begin{aligned} L - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + v \nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{V^2}{2} \right) &= -\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \\ N - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{V^2}{R} \\ B - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{V^2}{R} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

El proceso deductivo consiste en extender la expresión al tubo de corriente, lo que implica integrar una vez en el sentido de la sección.

Recurriendo nuevamente al artificio de plantear la potencias del escurrimiento, para soslayar así el problema de una constante de integración distinta para cada línea de corriente, se tiene;

$$\iint_{Q1} \frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \gamma dQ dl + \iint_{Q1} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \gamma dQ dl - \iint_{Q1} \frac{v \nabla^2 V}{g} \gamma dQ dl = -\frac{\gamma}{g} \int_Q \frac{\partial V}{\partial t} dQ \quad (11)$$

En régimen plenamente turbulento $\alpha \cong 1$, por lo que el término de impermanencia, extendido a la sección, queda:

$$-\frac{\gamma}{g} \int_Q \frac{\partial V}{\partial t} dQ = -\frac{\gamma}{g} \int_Q \frac{\partial U}{\partial t} dQ = -\frac{\gamma Q}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

Recordando las reglas de Bresse, las que permitieron la extensión a la sección de los dos primeros términos, y la extensión de los correspondientes a la energía cinética y a las pérdidas de energía, se obtiene que:

$$\gamma Q \frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \gamma Q \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{U^2}{2g} \right) = -j^* \gamma Q - \frac{\gamma Q}{g} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (12)$$

Dividiendo por γQ , se obtiene finalmente la primer Ecuación de Saint Venant:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \right) = -j^* - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}} \quad (13)$$

4. CONCLUSIONES

- La enseñanza de la Ecuación de Navier- Stokes es recomendable en la Carrera de Ingeniería Civil por constituir un caso particular de la Teoría del Medio Continuo.
- La enseñanza de la ecuación de referencia es recomendable toda vez que se pretenda una visión generalizada, a la vez que integradora, de la problemática del escurrimiento de los líquidos, puesto que muchas de las ecuaciones de utilidad práctica o "herramientas de trabajo" se obtienen de ella.
- Cuando la formación es eminentemente práctica, y sus objetivos son solamente los escurrimientos unidimensionales, no es necesaria su consideración, pudiéndose partir de la Ecuación de Saint Venant, con lo que se alivia considerablemente el tratamiento de la teoría de base.
- La ecuación permite justificar, con excelente nivel académico, las necesidades de modelos físicos o matemáticos, al demostrar la dificultad o imposibilidad de su integración para casos complejos. Despreciando en la misma los efectos de las fuerzas relativamente poco importantes frente a la principal, y estableciendo las relaciones entre modelos y prototipos, se pueden obtener los números de Reynolds, Froude y Euler.