



**Secretaría de Investigación y Doctorado**

**Pre-admisión al Doctorado: examen de MATEMÁTICA**

**En la resolución de cada ítem exponga claramente su forma de razonar, justifique lo que afirma e incluya el desarrollo de los cálculos asociados.**

- 1) Justifique si cada una de las siguientes afirmaciones es Verdadera o Falsa, en caso de ser Falsa alcanza con que elija y desarrolle un contraejemplo.

- a) Toda función  $f$  de una variable que es derivable en un punto  $x_0$ , es continua en dicho punto.  
b) Toda función  $f$  de dos variables que admite derivadas parciales en un punto  $(x_0, y_0)$ , es continua en dicho punto.

- 2) Aplicando el cambio de coordenadas dado por  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  la región  $D$  del plano  $xy$  se transforma en  $W$  del plano  $uv$ . Calcule  $\iint_W v^2 dudv$  sabiendo que  $\iint_D (y - 4x)^2 dx dy = 150$ .

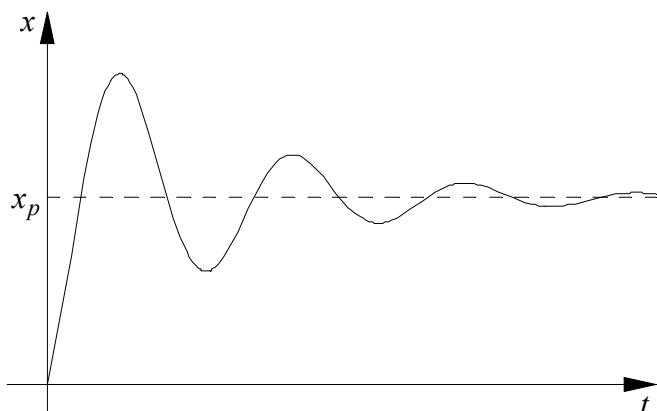
- 3) En un determinado proceso de carga que comienza en tiempo  $t = 0$  segundos, la tensión  $v$  (o diferencia de potencial en volts) entre terminales de un capacitor responde a la expresión  $v = E(1 - e^{-t/\tau})$ , mientras que  $i = C \frac{dv}{dt}$  es la intensidad de corriente eléctrica en Ampere. Calcule la energía acumulada en el capacitor al finalizar el proceso de carga, sabiendo que dicha energía en Joule es  $\int_0^\infty v i dt$  con  $E, R, C$  constantes,  $\tau = RC$ . El integrando es el producto  $v$  por  $i$ .

- 4) El movimiento en línea recta de un cuerpo puntual se puede modelizar razonablemente mediante la ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes  $4x'' + kx' + 9x = F$ .

En dicha ecuación las derivadas se toman respecto del tiempo  $t$  en segundos (s),  $x$  es la posición del cuerpo en metros (m) y  $F$  es la intensidad de una fuerza en Newton (N) aplicada en la dirección del movimiento.

Suponiendo que  $F$  es constante:

- a) ¿Para qué rango de valores de  $k$  el movimiento puede tener un comportamiento del tipo oscilatorio amortiguado alrededor de una posición fija (ver dibujo)?  
b) En caso que el movimiento sea del tipo que se representa, calcule la posición  $x_p$  en estado permanente (ver dibujo).



- c) De acuerdo a las unidades de medida mencionadas, ¿cuáles son las unidades correspondientes para los coeficientes "4", "k" y "9" de la ecuación diferencial?