UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE HIDRAÚLICA

HIDRÁULICA GENERAL

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO Y SU APLICACIÓN A LA HIDRÁULICA

INGENIERO LUIS PEREZ FARRÁS
Profesor Consulto del Departamento de Hidráulica
Director de Carrera del Instituto de Ingeniería Sanitaria

INGENIERO JUAN MARCET
Profesor Adjunto de Física II
Secretario del Departamento de Hidráulica

Agosto 2009

Nota del Profesor Consulto

La nueva versión que se presenta a los alumnos, ha ampliado sus alcances y objetivos gracias a la coautoría del Profesor Juan Marcet, Secretario del Dto. De Hidráulica y Profesor Adjunto de Física II.

En efecto, en especial en el cuerpo del texto destinado a los conceptos matemáticos, el aporte del nombrado profesor implica una rigurosidad que el original no tenía, por lo que ahora, el breve texto, además de cumplir con el objetivo de posibilitar la interpretación física de los conceptos aplicados a la Mecánica del Continuo, lo hace con total fidelidad a los requerimientos específicos del Análisis Matemático.

Su aporte implicó además el perfeccionamiento conceptual de los capítulos de aplicación directa a los conceptos de “Campos” y en especial a los relativos a los Conceptos Fundamentales de la Hidráulica General.

Por otra parte, el breve texto que nos ocupa, será utilizado también a modo de ejemplo de aplicación, en la enseñanza de la Asignatura “Física II”, con el claro objetivo de terminar con la abstracción al que el tema es proclive si no se lo aplica a conceptos físicos claramente determinados.

Es oportuno agradecer la excelente labor de la Inga. María Eva Koutsovitis, JTP de Hidráulica General, encargada de la revisión y edición de ambas versiones del texto que nos ocupa.

Luis Eduardo Perez Farrás

Ingeniero Civil y Sanitario

INDICE

1- GENERALIDADES Y OBJETIVOS

Los años de experiencia en la enseñanza de la materia básica "Hidráulica General" y "Física II" nos han llevado a la conclusión que un capítulo como el presente, destinado a la revisión por parte de los cursantes de "Hidráulica General" y de "Físca II" de los conceptos matemáticos inherentes al "Análisis Vectorial" (ya analizados por los alumnos en "Análisis II") constituye una necesidad.

En efecto la aplicación de los conceptos estudiados con un importante grado de abstracción en los cursos de base necesita, a nuestro entender, de un capítulo de "transición" que posibilite evaluar la aplicación a la problemática física de las asignaturas mencionadas.

Se percibe en un muy importante porcentaje del alumnado gran dificultad para evaluar conceptualmente la simbología que se utiliza como lenguaje obligado de las ecuaciones básicas de la Mecánica del Continuo.

Por ello el objetivo central del presente texto, es el de analizar los Conceptos Básicos del Análisis Vectorial con una interpretación física que posibilite comprender su gran utilidad en la formulación básica de las materias Hidráulica General y Física II.

Es destacable el hecho que en general el equilibrio de fuerzas es un concepto rector de la Ingeniería Civil. En particular en Hidráulica General, dos de sus cuatro ecuaciones fundamentales están relacionadas con el equilibrio de las fuerzas dinámicas (surgen de los dos primeros principios de la Dinámica) mientras que una tercera, basada en el principio de la conservación de la masa, está ampliamente vinculada con los conceptos básicos del "Análisis Vectorial". Es decir las magnitudes vectoriales y los conceptos relevantes de "Análisis II" son de aplicación casi excluyente en los fundamentos de la Hidráulica General.

Por otra parte, la invariancia de las expresiones en notación vectorial, es decir su independencia del sistema de coordenadas, es otra virtud que amerita su uso generalizado. Conocida la expresión, su utilización en el sistema de coordenadas más adecuado a cada aplicación, no sólo brinda una concepción general y amplia del conocimiento de la misma, sino que además implica una fácil adaptación al sistema elegido.

En particular se hará amplia referencia a la aplicación del sistema de "Coordenadas Intrínsecas" (Triedro de Frenet), el que los alumnos estudian casi como una "rareza" en la materia correspondiente, sin sospechar la enorme importancia que tiene en la Ingeniería en general y en la hidráulica en particular.

Como recomendación a los alumnos de Hidráulica General para encarar el análisis del presente texto se les sugiere un análisis de su contenido hasta el numeral 3.3 en un comienzo y previo a encarar los capítulos de Ecuaciones Fundamentales (2, 3, 4 y 5). El resto conviene sea consultado previamente y durante el estudio de la Cinemática (Capítulo 3) y ser tenido en cuenta en los capítulos 4 y 5, cuando las ecuaciones fundamentales de la Dinámica son aplicadas al tubo de corriente (escurrimientos unidimensionales).

2- FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y DEL MEDIO CONTÌNUO

2.1 Campos

Se entiende por campo a una determinada magnitud física la cual se halla establecida en una dada región del espacio o dominio. Es decir que para cada uno de los puntos de la región corresponde la respectiva magnitud física que conforma el campo. En ciertos casos, como el que nos ocupa en la Mecánica de Fluidos, las magnitudes pueden expresarse como una función de las coordenadas del punto y del tiempo.

Si se trata de una magnitud física escalar, en cada punto del espacio la propiedad física tendrá un determinado y único valor numérico, es decir que cada punto del espacio cartesiano de coordenadas x, y, z presenta un valor numérico de una dada función f(x; y; z).

Si la función representa una magnitud física escalar, en cada punto del espacio la propiedad física tendrá un determinado valor numérico y único f (a; b; c), siendo a, b y c los valores de las coordenadas x, y, z del punto analizado. Por ejemplo, las propiedades, masa específica ρ, peso específico γ, presión p y temperatura t, constituyen ejemplos evidentes de funciones escalares de punto, del espacio de tres dimensiones.

En cambio, si la función representa una propiedad física vectorial, cada una de las componentes cartesianas del vector que la identifica será una respectiva función de esas tres coordenadas. Adelantándonos a lo que se analiza con más detalle en el Capítulo de Cinemática, se destaca que el campo será “Permanente o Estacionario o Constante” si los valores de la magnitud no dependen del tiempo. En cambio será “Impermanente o No Estacionario Temporal” si ocurre lo contrario. El campo resultará uniforme si la magnitud es idéntica en el tiempo y el espacio en todos los puntos de su dominio, sea ésta o no de tipo estacionario. En cada punto del espacio, para los valores a, b y c, se tiene un vector.

$$\overline{V}(x,y,z) = u(x,y,z)\overline{i} + v(x,y,z)\overline{j} + w(x,y,z)\overline{k}$$

Los campos de velocidades $\overline{V}$, aceleraciones $\overline{a}$ y rotores $rot\overline{V}$, constituyen ejemplos íntimamente relacionados con los desarrollos que posteriormente tendrán lugar.

2.2- Partícula fluida y medio continuo

Es la menor porción de sustancia fluida lo suficientemente pequeña, por una parte, como para poder aplicarle los conceptos del "Punto Material" (Análisis Matemático). Pero por otra parte es, a su vez, lo suficientemente grande como para que no se pierda la identidad de la sustancia en estudio.

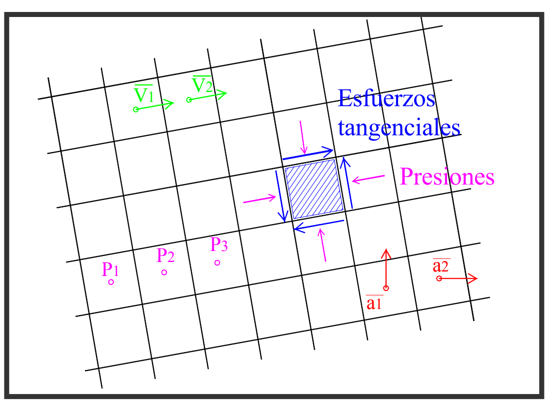

Figura 1
Interpretación según el Ingeniero Macagno

El medio continuo es una sucesión de partículas fluidas en movimiento (o en reposo como caso particular del mismo) sin que existan espacios vacíos ni choques entre ellas. Es una percepción "macroscópica" de la realidad. En efecto, el agua en particular y los fluidos en general, son efectivamente interpretados por nuestros sentidos como una sustancia continua y fácilmente deformable ante las solicitaciones.

La imagen debida al Ing. Macagno esquematizada en la Figura 1 es sumamente ilustrativa. En efecto en la misma las partículas fluidas son representadas bidimensionalmente (para obtener la imagen tridimensional bastará considerar la profundidad) por cuadrángulos idealmente pequeños. En el baricentro de los mismos puede ser considerada la propiedad física de que se trate tal como puede ser apreciado tanto para las propiedades escalares como las vectoriales. En particular el campo de velocidades $\overline{\boldsymbol{V}}$ constituye la principal de éstas últimas y obviamente está íntimamente relacionado con el objetivo fundamental del presente trabajo.

Nótese que en los límites de cada cuadrángulo se producen los esfuerzos tangenciales que justifican las deformaciones angulares de las distintas partículas de los fluidos reales o viscosos. Los alargamientos o acortamientos estarán obviamente relacionados con el campo de presiones.

2.3- Líneas que describen el escurrimiento-Tubo de Corriente

2.3.1- Trayectoria

Es el lugar geométrico de las sucesivas posiciones que ocupa una única partícula en el tiempo. Obviamente es una abstracción puesto que es imposible visualizarla en la realidad.

2.3.2- Línea de Corriente

Es por definición la línea envolvente de velocidades de sucesivas partículas en un instante dado. Es evidente que involucra a infinitas partículas en un instante, señaladas cada una por el vector velocidad de la partícula precedente inmediata. Es posible visualizarlas utilizando, por ejemplo, colorantes de igual masa específica que la del fluido en estudio.

De la imagen de Macagno para el medio continuo y de la definición de línea de corriente surge la imagen cualitativa del Escurrimiento, destacada en la Figura 2.

Se adelanta que también podrán considerarse aspectos cuantitativos o de cálculo, lo que constituye el objetivo de la "Red de Escurrimiento", la que se estudiará en el capítulo correspondiente.

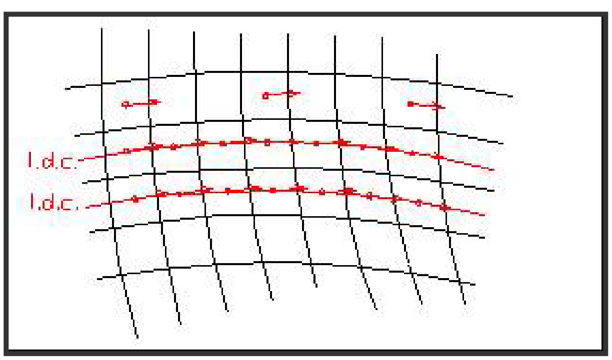

Figura 1
Configuración de l.d.c. en un instante dado

Las líneas de corriente representan el campo de velocidades en un instante dado, el que puede cambiar de configuración en el instante siguiente si el régimen es impermanente o no estacionario.

En cada punto existe un vector velocidad, tangente a la línea de corriente que pasa por allí. En el estudio del Capítulo correspondiente a la red de escurrimiento se profundiza el análisis.

2.3.3- Tubo de Corriente

Se lo esquematiza en la Figura 3, donde se observa que se obtiene de considerar una línea cerrada en el espacio ocupado por un campo de velocidades $\overline{\boldsymbol{V}}$.

Es evidente que al ser el nombrado espacio ocupado por vectores velocidad en todos sus puntos, siempre existirán líneas de corriente que serán tangentes, dando lugar a un tubo cuya propiedad principal es la de ser impermeable, puesto que por definición de l.d.c. no pueden existir componentes de velocidad normales a las mismas.

Obviamente, el tubo de flujo anterior está directamente aplicado a un campo vectorial de velocidades, las que al estar vinculadas al transporte de masa (agua en nuestro caso), implican la "impermeabilidad" acotada. Si el concepto fuera aplicado a un campo de vectores $\overline{\boldsymbol{A}}$, se obtiene una idea más general en la que se destaca la imposibilidad de que existan componentes del campo vectorial normales a las líneas que delimitan al tubo. Es decir que en su aplicación a la Hidráulica, encuentra un sentido físico muy preciso.

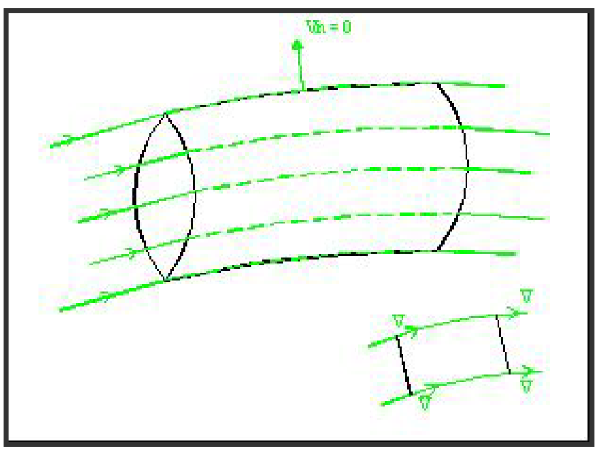

Figura 2
Tubo de corriente

2.4- Flujo de un vector-Caudal-Escurrimiento-Velocidad Media

En la Figura 4 se puede apreciar el flujo elemental de un campo vectorial $\overline{A}$, el que se define por el producto escalar:

$$d\phi = \overline{A}.\overline{d\Omega} = |A|\,|d\Omega| \cos(\overline{A; d\Omega}) = A_n\, d\Omega$$

La integral, extendida a toda la superficie Ω, resulta entonces:

$$\phi = \int_{\Omega} \overline{A}\,.\,\overline{d\Omega} = \int_{\Omega} A_n\, d\Omega$$

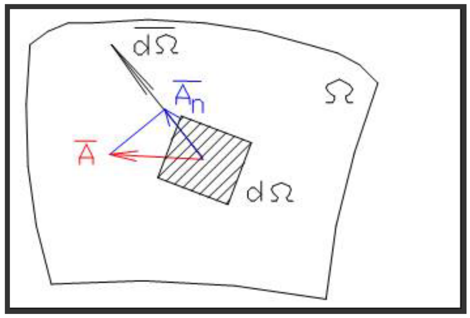

Figura 3
Flujo de un Vector

Si el campo elemental es un campo de velocidades en un medio continuo, lo que implica transporte de masa, el flujo elemental se denomina "Caudal Elemental *dq*".

En consecuencia:

$$dQ = \overline{V} \,.\, \overline{d\Omega} = V\, d\Omega \cos(\overline{V ; d\Omega}) = V_n \, d\Omega$$

y la integral resulta:

$$Q = \int_{\Omega} \overline{V} \,.\, \overline{d\Omega} = \int_{\Omega} V_n \, d\Omega$$

Se define como velocidad media U en la superficie Ω a la que surge de considerar:

$$Q = U\Omega = \int_{\Omega} \overline{V} \,.\, \overline{d\Omega} = \int_{\Omega} V_n \, d\Omega$$

Cuya ecuación de dimensión es:

$$\frac{L}{T} L^2 = \frac{L^3}{T} \quad \text{; es decir} \quad \frac{m^3}{s} ; \frac{l}{s}$$

Al despejar U, la velocidad media resulta:

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} V_n d\Omega = \frac{Q}{\Omega}$$

Cuya dimensión es L / T, es decir m/s.

Al transporte de masa obligado por el campo de velocidades inherente al medio continuo en estudio, se lo denomina "Escurrimiento".

El gasto o caudal elemental de masa se obtiene al multiplicar el gasto elemental por la masa específica ρ. En efecto:

$$dq_m = \rho dq = \rho \, \overline{V} . \overline{d\Omega}$$

Por lo que la integral será:

$$Q_m = \int_{\Omega} \rho dq = \rho V d\Omega = \rho Q = \rho U \Omega$$

Evidentemente, su ecuación de dimensión resulta:

$$\frac{M}{L^3}\frac{L}{T}L^2 = \frac{M}{T}$$

que se mide en unidades de masa / tiempo.

2.5- Circulación

Se define a la circulación elemental, sobre un diferencial de curva cerrada dentro de un campo vectorial $\overline{A}$ como el producto escalar $\overline{A}.d\overline{s}$.

Consecuentemente, la circulación de un campo vectorial $\overline{A}$, sobre una curva cerrada en el mismo, se define como:

$$\Gamma = \oint \overline{A}.d\overline{s} = \oint A\ ds\ \cos\left(\overline{A};\overline{ds}\right) = \oint A_s\ ds$$

Aplicando el concepto al campo de velocidades representado por la configuración de l.d.c. de la Figura 5, se considera una curva cerrada S dentro de dicho campo. Se define a la circulación elemental como el producto escalar $\overline{V}.d\overline{S}$.

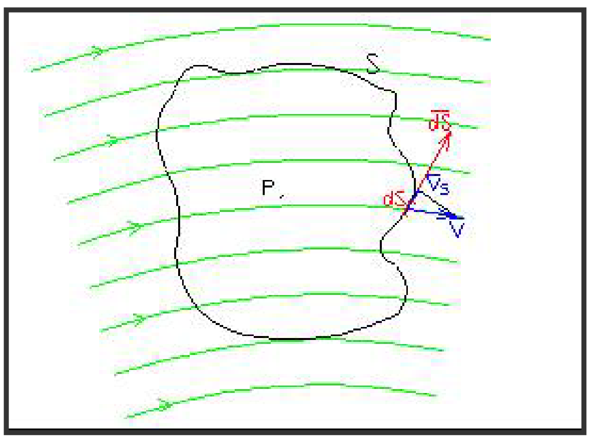

Figura 4
Circulación de un Vector

Por lo tanto, la Circulación Γ del ahora vector Velocidad resulta:

$$\Gamma = \oint \overline{V}.d\overline{s} = \oint V ds\ \cos\left(\overline{V};\overline{ds}\right) = \oint V_s\, ds$$

Si Γ es distinta de cero, existe masa que circula alrededor del punto medio P. Se obtiene así la interpretación de un "vórtice" real.

Nota: Si el campo de velocidades es uniforme la circulación es necesariamente nula.

2.6- ROTOR

Se define como Vector Rotor del campo vectorial en un punto, a aquel cuyo módulo es el máximo límite del cociente entre la circulación cerrada del campo vectorial en torno de ese punto y el módulo del área delimitada por la circulación, cuando ésta tiende a cero. La dirección del vector rotor es la del vector superficie y el sentido es tal que apunta a un observador que ve circular los vectores en el sentido antihorario.

$$\boldsymbol{rot}\ \overline{\boldsymbol{A}} = \lim_{|\overline{\Omega}| \to 0} \left[\frac{\Gamma}{|\overline{\Omega}|} \right]_{max} \cdot \frac{\overline{\Omega}}{|\overline{\Omega}|}$$

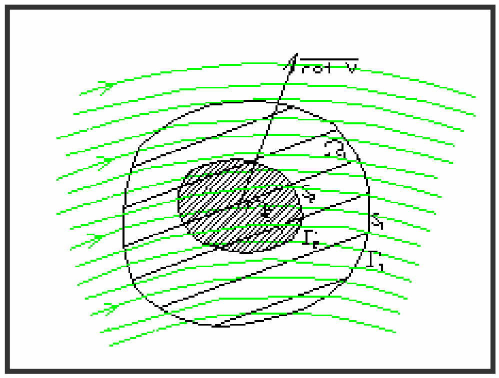

Figura 6
Vector Rotor

Nota:En la Figura 6 se representa un campo de velocidades caracterizado por sus líneas de corriente y considerando una curva en un plano atravesado por las l.d.c.. Es decir que el campo vectorial considerado es ahora un campo de velocidades con el consecuente transporte de masa.

En la que queda claro que $\overline{\Omega}/|\overline{\Omega}|$ es el versor normal al elemento de superficie sobre cuyo borde se considera la circulación, la que maximiza su relación respecto del área encerrada.

En otras palabras, se puede circular en forma cerrada alrededor de un punto de un campo vectorial, pero hay un camino de privilegio que maximiza al cociente:

$$\Gamma = \frac{\oint \overline{\boldsymbol{A}} \cdot d\overline{\boldsymbol{s}}}{|\overline{\Omega}|}$$

La dimensión del rotor de un campo de velocidades resulta

$$\frac{\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}/\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{L}^2} = \boldsymbol{T}^{-1}$$

Es decir la inversa de un segundo.

De una forma elemental, y probablemente sin demasiado rigor matemático, cabe obtener la expresión final del Teorema de Stokes de la forma que sigue:

De la definición de vector rotor se puede despejar:

$$d\Gamma = rot\,\overline{A}\,.\,\overline{d\Omega}$$

Aplicado al campo de velocidades se tiene

$$d\Gamma = rot\,\overline{V}\,.\,\overline{d\Omega}$$

Por lo que la integral resulta para un campo genérico:

$$\Gamma = \oint \overline{A}.\,d\overline{s} = \int_{\Omega} rot\,\overline{A}.\,d\Omega$$

Y en especial para el campo de velocidades

$$\Gamma = \oint \overline{V}.d\overline{s} = \int_{\Omega} rot\overline{V}.\,d\Omega$$

La que se interpreta como que "la circulación sobre una curva cerrada inmersa en el campo vectorial, es igual al flujo de su rotor sobre la superficie que esa curva cerrada encierra". Esta propiedad se la conoce como “Teorema de STOKES”.

2.7- Divergencia

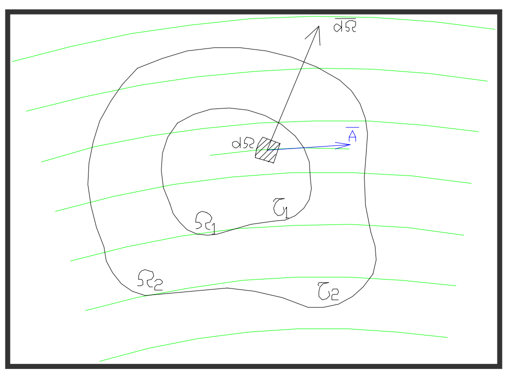

Figura 5
Divergencia de un Vector

Se define como la divergencia del campo vectorial $\overline{A}$, al límite del flujo del mismo en la superficie del volumen de control, cuando el mismo tiende a anularse. En símbolos:

$$div\,\overline{A} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau} = \frac{d\Phi}{d\tau}$$

Se recuerda que las componentes cartesianas de la divergencia de un vector $\overline{A}$ están dadas por la expresión:

$$div\,\overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Recordando además que:

$$d\phi = \overline{A} \,.\, d\overline{\Omega}$$

y consecuentemente

$$\phi = \int_{\Omega} \overline{A} \,.\, d\overline{\Omega}$$

Al considerar la definición de $div\ \overline{A}$, se tiene que:

$$div\, \overline{A} = \frac{d\phi}{d\tau}$$

Por lo tanto

$$d\phi = div\, \overline{A}\ d\tau$$

y la integral resulta:

$$\phi = \int_{\tau} div\, \overline{A}\, d\tau$$

Recordando la definición de Flujo de un campo vectorial, se tiene:

$$\int_{\Omega} \overline{A} \,.\, d\overline{\Omega} = \int_{\tau} div\, \overline{A}\ d\tau$$

Que es la expresión del teorema de Gauss-Green, obtenida de una forma elemental, y que se interpreta como que el flujo del campo vectorial que atraviesa la superficie cerrada que delimita el volumen de control, fijo en el espacio, resulta igual a la integral de la divergencia extendida a dicho volumen.

Es de destacar que cuando el campo vectorial representa el campo de vectores velocidad en un medio continuo escurriendo, el concepto de divergencia aplicado a un elemento diferencial de volumen, da lugar a una ecuación fundamental de la Hidráulica, que es la ecuación de Continuidad en un punto, la que se analiza en detalle en precisamente el Capítulo de Ecuaciones Fundamentales.

2.8- Diferencial Total Exacta

Es conveniente recordar brevemente el concepto de diferencial total exacta en coordenadas cartesianas.

Considerando una cierta función escalar *f (x; y; z)*, su diferencial total se expresa como:

$$df(x;y;z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x;y;z)\ dx + \frac{\partial}{\partial y} f(x;y;z)\ dy + \frac{\partial}{\partial z} f(x;y;z)\ dz$$

Al cumplirse la regla de Shwarz por la cual

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x}\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\ \partial x}\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\ \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial z}$$

Se garantiza que el gradiente de la función es un campo vectorial conservativo y, en consecuencia, deviene de un escalar potencial..

2.9- Vector Gradiente

Dada una función escalar U=f (x; y; z) tal como la que se pretende representar en la Figura 8, es evidente que si desde un punto cualquiera nos desplazamos en su entorno según una determinada dirección y sentido , registraremos una variación ΔU en la función escalar. Si existe una dirección de privilegio en la cual la razón entre ΔU y la magnitud del desplazamiento es la máxima de todas, entonces esa dirección indica la correspondiente a la derivada direccional máxima.

Se define como vector Gradiente de un campo escalar en un punto, a un vector cuyo módulo es el valor absoluto de su máxima derivada direccional y cuyo sentido sobre esa dirección corresponde al crecimiento de la función correspondiente al campo escalar.

En resumen, si se le asignan a cada punto del campo las siguientes propiedades:

a) La dirección y sentido del más sensible crecimiento de U en el entorno del punto de definición.
b) El valor del cociente entre el incremento de U resultante de un recorrido infinitésimo según la dirección indicada en a).

Se define como Vector Gradiente del campo U, aquel que tiene la dirección y sentido indicado en a) y como módulo el indicado en b).

Nota: por ejemplo el gradiente de un campo escalar de presión resulta, dimensionalmente, expresado en F / L3

En la Figura 8 se esquematizan los conceptos, a la vez que la misma permite interpretar que la expresión cartesiana del Vector Gradiente resulta:

$$\overline{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}$$

Por otra parte el vector desplazamiento en una dirección cualquiera es:

$$\overline{dl} = dx\,\bar{i} + dy\,\bar{j} + dz\,\bar{k}$$

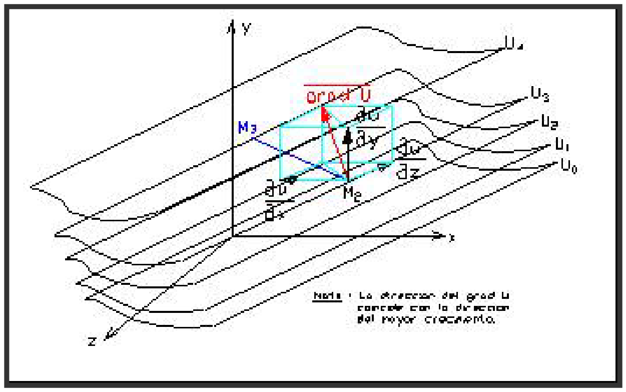

Figura 6
Vector Gradiente

El producto escalar de ambos vectores representa la componente según la dirección arbitraria $\bar{l}$, en efecto:

$$\overline{grad}\, U \,.\, \overline{dl} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

Recordando que el segundo miembro es la diferencial total exacta *dU*, se tiene:

$$\overline{grad}\, U.\overline{dl} = dU = (grad U)_l .dl$$

Esta última expresión nos brinda el valor del módulo del gradiente en una dirección cualquiera *l*.

Despejando *dU* de la misma e integrando entre dos puntos A y B, se obtiene:

$$\int_{A \to B} \overline{grad}\, U.\, \overline{dl} = \int_A^B dU = U_B - U_A$$

Por lo que la integral curvilínea sobre un camino cualquiera pero cerrado, resulta:

$$\oint \overline{grad}\, U.\overline{dl} = 0$$

3- COORDENADAS INTRÍNSECAS

3-1- Generalidades

En el capítulo inicial se destacó que la importancia de las Coordenadas intrínsecas en la Ingeniería es muy grande. Es más, muchas veces, su aplicación, hasta pasa desapercibida cuando se estudian o se trabaja en obra en determinados temas (Caminos, Ferrocarriles, Canales, Escurrimientos en Conducciones a presión, Ríos, etc.).

En efecto, con el objeto de fundamentar lo aseverado en cuanto a la utilidad de la "Terna Intrínseca", se desarrolla un ejemplo sumamente ilustrativo a continuación.

Imagínese el caso de dos grupos de personas que emprenden un viaje conjunto en automóvil pero que parten desde puntos bien alejados el uno del otro y convienen encontrarse en el camino, en un determinado lugar y a una hora pre-establecida. Lo usual es encontrarse en algún local conocido a la vera del camino para realizar alguna acción como desayunar o tomar un refrigerio, entre muchas variantes posibles.

Suele ocurrir que lo razonable es encontrase "....en tal lugar a tal hora....." y en el caso de que uno de los grupos no conozca fehacientemente el lugar de encuentro, fijar en que km de la ruta correspondiente está el lugar. Justamente esta forma de proceder es utilizar las coordenadas intrínsecas dado que con una sóla coordenada estamos fijando el punto de encuentro. Ésta coordenada es la denominada "progresiva" en una curva espacial (el eje del camino) que como ya está establecido y construido, no tiene posibilidades de confusión. En éste caso se está usando tan sólo el eje $\bar{l}$ de la terna intrínseca y obviamente la propiedad física en uso, es una extremadamente sencilla, la "longitud".

Es oportuno meditar ahora, cómo sería llegar a idéntico acuerdo pero usando las Coordenadas Cartesianas, asumida cómo la más utilizada por el alumnado en general, dado que es la que más frecuentemente se utiliza en las aplicaciones comunes de las asignaturas formativas y de muchas de aplicación tecnológica (en nuestra materia también utilizamos cuando nos conviene el sistema cartesiano aunque las coordenadas intrínsecas son utilizadas en forma excluyente en los Movimientos Unidimensionales, lo que cubre un importantísimo porcentaje de las aplicaciones de nuestra especialidad).

En ese caso para fijar el punto de encuentro, deberíamos fijar un origen de coordenadas para aplicar los ejes coordenados z; y ;x, y posteriormente encontrar la ecuación del eje del camino en esas coordenadas. Los métodos matemáticos posibilitan tras una ardua tarea obtener la ecuación correspondiente (por ejemplo con el método de los "Mínimos cuadrados") y se pueden fijar las coordenadas z_0 ; y_0 ; x_0 del punto de encuentro para la ecuación del eje del camino.

La complicación absurda que éste proceder implica no merece más comentarios excepto el hecho que facilita comprender fehacientemente las ventajas de la Terna Intrínseca para este caso de aplicación tan simple.

En general para la Construcción de la obra y ubicación de puntos en Caminos, Ferrocarriles, Canales, Acueductos, Ríos, etc. se recurre a éste sistema de coordenadas con evidente ventaja práctica. Se establece un punto origen del eje de la curva predeterminada y fijada en el terreno (por ejemplo mediante estacas en la etapa de construcción) y a partir del mismo se establecen la longitudes o "progresivas" expresadas en metros o sus múltiplos (obviamente es usual el Km en Caminos, Ferrocarriles y Canales navegables).

3.2- Definición e interpretación

En la Figura 9 se recuerda la Terna Intrínseca definida por los versores Tangente $\bar{l}$, Normal $\bar{n}$ y Binormal $\bar{b}$. El versor normal contiene al "radio de curvatura" de la curva espacial.

El plano formado por los ejes l y n, es el denominado “plano osculador” (definido por dos tangentes sucesivas y cuya denominación proviene del griego “ósculo” que significa “beso” o en nuestra aplicación, cercanía). El plano formado por los ejes b y n resulta perpendicular al primero.

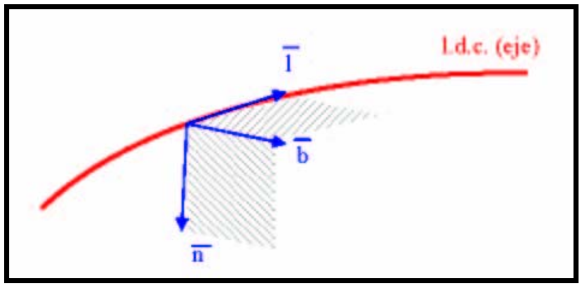

Figura 9
Plano Osculador

3-3- Derivadas Parciales en Coordenadas Intrínsecas
El objetivo del presente numeral es el de aplicar el concepto para el caso común de las aplicaciones hidráulicas, en las que las propiedades físicas pueden ser en general función del espacio (una dimensión en coordenadas intrínsecas) y del tiempo.

Denominando consecuentemente y en forma genérica a la variable cómo A(l;t), se tiene que su diferencial total exacto es

$$dA = \frac{\partial A}{\partial l}\, dl + \frac{\partial A}{\partial t}\, dt$$

Consecuentemente su derivada con respecto al tiempo es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial l}\frac{dl}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

El módulo del vector velocidad es en todos los casos $V = \frac{dl}{dt}$ y obviamente $\frac{dt}{dt} = 1$

Por lo que la anterior queda

$$\frac{dA}{dt} = V\,\frac{\partial A}{\partial l} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Todas las variables que implican las propiedades físicas de los medios continuos pueden ser entonces derivadas teniendo en cuenta la variable a ser considerada y el operador

$$\frac{d}{dt} = V\,\frac{\partial}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Por ejemplo, si la propiedad física es “la masa específica ρ ” la expresión de la derivada respecto al espacio y el tiempo es

$$\frac{d\rho}{dt} = V\,\frac{\partial \rho}{\partial l} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En el caso del "peso específico γ " la derivada resulta

$$\frac{d\gamma}{dt} = V \frac{\partial \gamma}{\partial l} + \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

En el caso de la "presión", resulta

$$\frac{dp}{dt} = V \frac{\partial p}{\partial l} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

En el caso especial del módulo del vector velocidad, resulta

$$\frac{dV}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial l} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

La que obviamente es, por definición, el módulo del vector aceleración.

En este caso particular, teniendo en cuenta la derivación, la expresión anterior toma la forma muy utilizada

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

3-4- Escurrimientos Unidimensionales
Si se considera al tubo de corriente de la figura 10, con la obvia intención de considerar unidimensionalmente a los escurrimientos (caso de tuberías a presión y canales) resulta evidente al analizar la figura que el plano definido por los versores "Normal y Binormal" representa a la sección transversal del mismo.

En el caso del tubo de corriente, dada su propiedad de resultar "impermeable" por definición (imposibilidad de componentes normales de la velocidad y transporte de masa lateral), la velocidad media definida en 2.4 dada por la expresión

$$U = \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} \overline{V}\, d\overline{\Omega} = \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} V_n\, d\Omega$$

se hace mucho más simple, pues se aplica a cada sección transversal y resulta representativa de la infinitud de velocidades actuantes en la misma (en realidad U implica el mismo transporte de masa que el que se obtendría realizando la integral de la expresión anterior).

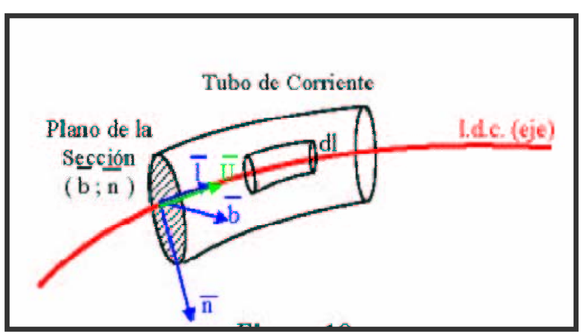

Figura 10
Escurrimiento Unidimensional

Nota: Se adelanta que en la práctica de la hidráulica elemental (Conducciones a presión y canales), la obtención de U es muy simple sin necesidad de complejas integraciones.

3.5- El Vector Velocidad en Coordenadas Intrínsecas

Al quedar el espacio en función del versor $\bar{l}$ y teniendo en cuenta la definición del vector velocidad, resulta evidente que ésta sólo resultará dependiente de la variable "*l*" (longitud recorrida sobre la curva) y según la expresión que sigue

$$\bar{V} = V\,\bar{l} = \frac{dl}{dt}\,\bar{l}$$

La expresión anterior muestra claramente cómo debido a que el espacio se mide con una sola coordenada, el vector velocidad presenta tan sólo una componente contra las 3 que implica el sistema cartesiano (Ver Cinemática).

La extensión al tubo de corriente es inmediata al considerar la velocidad media "U" (definida previamente en 2.4-) en cada sección transversal del mismo, siendo aplicada en todos los casos como el vector

$$\bar{U} = U\,\bar{l} = \frac{dl}{dt}\,\bar{l}$$

Los razonamientos previos muestran con toda claridad como el concepto de Velocidad Media aplicado al tubo de corriente a los denominados "Escurrimientos Unidimensionales".

Las conducciones a presión o a superficie libre (Canales) cumplimentan con total satisfacción éstas premisas. En efecto al constituir tubos de corriente, dada la impermeabilidad de sus contornos sólidos y al encontrarse una velocidad media representativa de la infinitud de velocidades en la sección resultan claros exponentes de "Escurrimientos Unidimensionales".

Es de destacar que las Conducciones a Presión y los Canales, constituyen infraestructura de enorme aplicación en la Ingeniería Civil.

3.6- El Vector Aceleración en Coordenadas Intrínsecas

El siguiente desarrollo tiene como objetivo demostrar la simplificación desde el punto de vista simbólico de las expresiones del vector aceleración.

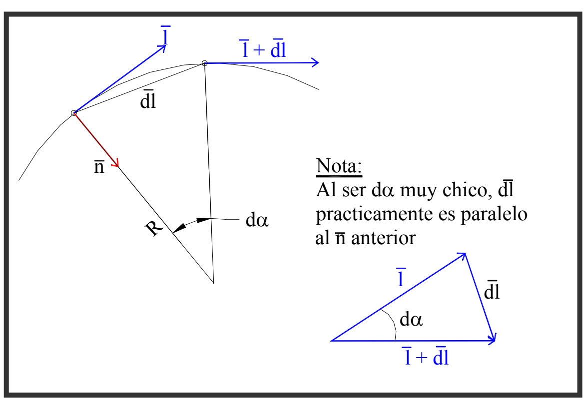

Figura 11
Figura de Análisis

El vector aceleración es por definición:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{V}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(V\bar{l}\right)=\frac{dV}{dt}\bar{l}+\frac{d\bar{l}}{dt}V$$

pero puede ser considerado que:

$$\frac{d\bar{l}}{dt}=\frac{d\bar{l}}{dl}\frac{dl}{dt}=\frac{d\bar{l}}{dl}V$$

por lo que reemplazando en la anterior, se tiene:

$$\bar{a}=\frac{dV}{dt}\bar{l}+V^{2}\frac{d\bar{l}}{dl}$$

Del análisis de la figura se deducen los siguientes conceptos:

$$dl=Rd\alpha;\left|\overline{l+dl}\right|=\left|\bar{l}\right|=1;\overline{dl}=d\alpha\bar{n};\overline{dl}=\left|\overline{dl}\right|\bar{n};\left|\overline{dl}\right|=1.d\alpha$$

por lo que la variación del versor $\bar{l}$ en el recorrido, resulta:

$$\frac{d\bar{l}}{dl}=\frac{d\alpha.\bar{n}}{R.d\alpha}=\frac{1}{R}\bar{n}$$

Reemplazando se obtiene que el vector aceleración resulta:

$$\bar{a}=\frac{dV}{dt}\bar{l}+\frac{V^{2}}{R}\bar{n}$$

Recordando el módulo del vector aceleración, ya obtenido previamente en el numeral 3.3-

$$a=\frac{dV}{dt}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^{2}}{2}\right)+\frac{\partial V}{\partial t}$$

Finalmente, reemplazando en la anterior, la expresión del vector aceleración en coordenadas intrínsecas resulta:

$$\bar{a}=\left[\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^{2}}{2}\right)+\frac{\partial V}{\partial t}\right]\bar{l}+\frac{V^{2}}{R}\bar{n}$$

Obviamente para régimen permanente se anula la derivada del módulo de la velocidad con respecto al tiempo, con lo que la expresión queda para ese caso:

$$\bar{a}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^{2}}{R}\right)\bar{l}+\frac{V^{2}}{R}\bar{n}$$

La expresiones anteriores obtenidas, muestran claramente cómo debido a que el espacio se mide con una sola coordenada, el vector aceleración presenta tan sólo 2 componentes contra las 4 que implica el sistema cartesiano (ver Capítulo de Cinemática).

La extensión al tubo de corriente también es inmediata en éste caso al considerar la velocidad media “U” (definida previamente en 2.4) en cada sección transversal del mismo.